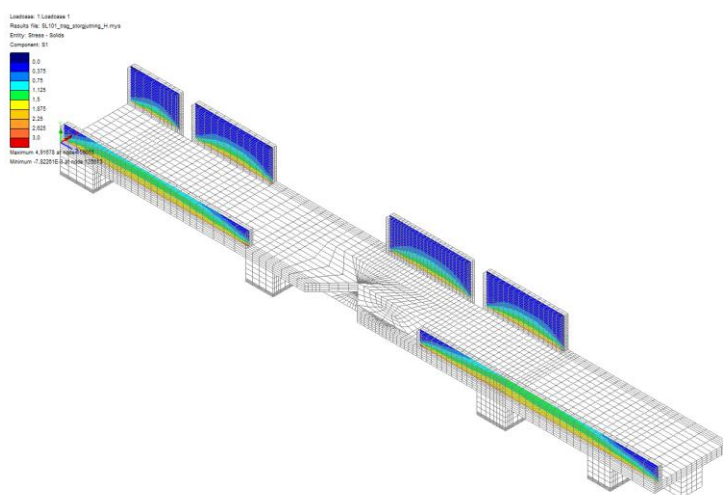


# TVÅNG FÖR SPRICKANALYSER

Tvång i betongkonstruktioner



**Martin Nilsson<sup>1</sup>, Hans Hedlund<sup>1,2</sup>, Mats Emborg<sup>1</sup>, Jan-Erik Jonasson<sup>1</sup>, Stig Bernader<sup>1,2</sup>**

**2015-11-16**

1 Luleå tekniska universitet, 2 Skanska Sverige AB



**TEKNISK RAPPORT**

# **Tvång i betongkonstruktioner**

Martin Nilsson

Hans Hedlund

Mats Emborg

Jan-Erik Jonasson

Stig Bernander

Avdelningen för byggkonstruktion och -produktion  
Konstruktionsteknik  
Institutionen för samhällsbyggnad och naturresurser  
Luleå tekniska universitet  
971 87 Luleå

## **Förord**

Föreliggande rapport är en sammanställning av kända och nya metoder och analysätt för bedömning och kvantifiering av tvång och fastlåsningseffekter verkande på betongkonstruktioner att användas vid beräkning av temperatur- och fuktrelaterade sprickrisker.

I rapporten beskrivs även de fenomen som orsakar sprickor och olika metoder som används för beräkning av sprickrisker, framförallt temperatursprickor.

Denna sammanställning har gjorts möjlig genom finansiering från SBUF. Författarna i projektgruppen vill rikta ett stort tack till SBUF för såväl finansiering av projektet, men även för sitt tålamod. Projektet startade våren 2005 och avslutas härmed.

Luleå och Göteborg i november 2015

Författarna

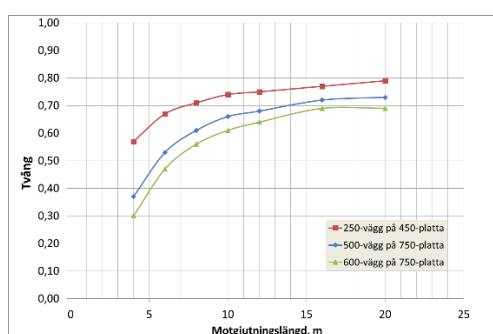
## Sammanfattning

De mest avgörande faktorer som påverkar sprickbildning i tidigt skede är temperatur- och fuktförhållanden, graden av tvång, den unga betongens mekaniska egenskaper samt angränsande konstruktioners beteende. Dessa faktorer kan å andra sidan alla påverkas redan i konstruktionskedet genom exempelvis olika val av betongrecept, av gjutordningar och gjutförhållanden samt av konstruktionsindelningar.

Tvånget påverkas av den generella strukturella konfigurationen t.ex. dimension, styvhet hos motgjutning och graden av vidhäftning mot denne, grundförhållanden hur konstruktionen gjuts (gjutordning, anläggande av gjutfogar etc.). Beräkningserfarenheter där tvånget varierats visar dess avgörande betydelse inte bara på spänningsnivå utan även på om betongen kommer att vara i tryck eller drag vid en viss tidpunkt efter gjutning.

Möjligheten till glidning i gjutfogar och mot undergrund inverkar också på tvånget där gjutfogars egenskaper (råhet och mängd genomgående armering) har betydelse. En gjutfogsglidning reducerar tvångsspänningarna och följaktligen risken för sprickbildning.

Genom en elastisk analys (FEM) där en nygjuten – och motgjuten – konstruktionsdel utsätts för en temperaturändring kan en rimlig bedömning av dimensionerande tvång ske, se exempel i figur en nedan. Metoden har visat sig vara mycket effektiv vid sprickriskberäkningar. Metodens tillförlitlighet är i hög grad beroende av hur väl den elastiska analysen kan simulera det verkliga tvångsförhållandet. Efter att tvånget bestämts kan såväl avancerade beräkningsprogram som enkla handberäkningsmetoder appliceras för sprickriskbestämning.



*Beräknat tvång i dimensionerande punkt för vägg placerad på mitten av bottenplattan.*

En undergrund av fast berg skiljer sig naturligtvis kraftigt från en undergrund av jord. Medan styvheten och styrkan i jord ibland endast uppgår till bråkdelar av en procent av den för betong, kan elasticitetsmodulen och styrkan hos fast berg av vulkaniskt ursprung vara betydligt högre än för betong. Å andra sidan har inte kraftigt sprucket berg, mjuka sedimentära bergarter och skiffer förmåga att effektivt motstå de små förskjutningarna på grund av temperaturutvecklingen i betong. Av erfarenhet förekommer det vanligtvis ett spricksystem i motgjuten berggrund, vilket kan medge erforderlig deformation och rörelse varvid fastlåsningens graden minskar och tvånget sjunker. Vid gjutning direkt mot väl rensat berg kan det dimensionerande tvånget uppgå till i storleksordningen 80% av fullt yttre tvång.

I rapporten ges vidare flera exempel på hur dimensionerande tvång kan beräknas eller uppskattas för olika tvångsfall.



## Innehållsförteckning

## Innehållsförteckning

FÖRORD .....	III	
SAMMANFATTNING.....	IV	
INNEHÅLLSFÖRTECKNING .....	VII	
<b>1</b>	<b>INLEDNING.....</b>	<b>1</b>
1.1	Allmänt.....	1
1.2	Inverkande faktorer och dess påverkan på sprickrisken.....	1
1.3	Uppkomst av temperatursprickor .....	4
1.4	Tidig sprickbildning av krympning .....	5
<b>2</b>	<b>SPRICKTYPER, KONSEKVENSER OCH STRUKTURER.....</b>	<b>9</b>
2.1	Klassificering av sprickor.....	9
2.1.1	Tidiga sprickor under uppvärmningsfasen .....	10
2.1.2	Genomgående sprickor under avsvlningsfasen .....	10
2.2	Alternativ klassificering av sprickor .....	11
2.3	Strukturer och typfall där temperatursprickor kan uppkomma.....	12
2.3.1	Massiva betongkonstruktioner .....	13
2.3.2	Mellanstora konstruktioner.....	13
2.3.3	Tunnare strukturer.....	13
2.4	Strukturella konsekvenser av sprickor.....	13
<b>3</b>	<b>SPRICKRISKBERÄKNINGAR.....</b>	<b>15</b>
3.1	Uppskattning av sprickrisk av temperaturrörelser .....	15
3.2	Metoder för sprickriskberäkningar .....	18

3.2.1	Den enaxiella enpunktsmetoden .....	18
3.2.2	Trestegsmetoden (ingenjörsmetod enligt Skanska) .....	20
3.2.3	Kompensationslinjemetoden (plan böjning – 1D) .....	22
3.3	Semi-analytisk modell för uppskattning av tvång.....	23
<b>4</b>	<b>GRAD AV TVÅNG – DET ENAXIELLA TVÅNGET .....</b>	<b>27</b>
4.1	Bakgrund.....	27
4.2	Modellering .....	27
4.2.1	Grad av tvång – generellt .....	27
4.2.2	Grad av enaxiellt tvång .....	28
4.3	Rekommenderade värden.....	29
4.4	Exempel på tvångsanalys – två betongelement i samverkan .....	29
<b>5</b>	<b>TVÅNGSFALL.....</b>	<b>33</b>
5.1	Inledning .....	33
5.2	Tvångsfall.....	36
5.3	Enaxiellt ändtvång.....	38
5.4	Kontinuerlig oeftergivlig rand oavsett material.....	40
5.5	Kontinuerligt delvis eftergivlig rand mot friktionsmaterial.....	43
5.5.1	Translation .....	43
5.5.2	Böjning/rotation .....	45
5.5.3	Glidning på underlaget .....	48
5.5.4	Pålgrundläggning.....	50
5.6	Kontinuerligt delvis eftergivlig rand mot bergmaterial.....	51
5.7	Randtvång vid betong mot betong .....	53
5.7.1	Translation .....	53
5.7.2	Translation .....	54
5.7.3	Böjning/rotation.....	54
5.7.4	Glidning/uppsprickning i gjutfog.....	55
5.8	Övriga tvångssituationer .....	60
5.8.1	Samverkansbroar .....	60
	<b>REFERENSER .....</b>	<b>61</b>
	Bilaga A Balk på elastisk halvrymd .....	67
	Bilaga B Platta på lutande pålar .....	83
	Bilaga C Samverkansbroar.....	87
<b>BILAGA A</b>	<b>BALK PÅ ELASTISK HALVRYMD.....</b>	<b>39</b>



## Innehållsförteckning

BILAGA B	PLATTA PÅ LUTANDE PÅLAR .....	55
BILAGA C	SAMVERKANSBROAR .....	59



# 1 Inledning

## 1.1 Allmänt

Tidig sprickbildning i betong bör undvikas i många konstruktioner exempelvis tunnlar under grundvattenytan eller broar exponerade för klorider och/eller frys- och töcykler i fuktiga miljöer. Genomgående sprickor i konstruktioner med ensidigt vattentryck kan t.ex. leda till vatteninträning och eventuellt även vattengenomträngning beroende på sprickvidden (större än ca 0,1 mm). Inträngning av kloridjoner i sprickor kan avsevärt reducera initieringsperioden för armeringskorrosion. Om vatten tar sig in i en spricka kan frysning och tining öka sprickvidden med risk för läckage och/eller beständighetsproblem som en konsekvens, se exempelvis Fagerlund (1992 & 1994). Därför är det viktigt att förstå de faktorer som inverkar på risken för temperatursprickor. Ökad kunskap om problemet och de påverkande faktorerna gynnar byggprocessen och minskar de totala kostnaderna.

De mest avgörande faktorer som påverkar sprickbildning i tidigt skede är temperatur- och fuktförhållanden, graden av tvång, den unga betongens mekaniska egenskaper samt angränsande konstruktioners beteende, se Bernander (1998). Dessa faktorer kan å andra sidan alla påverkas redan i konstruktionsskedet genom exempelvis olika val av betongrecept, av gjutordningar och gjutförhållanden samt av konstruktionsindelningar.

Tvång är således en av de fundamentala parametrar som ingår i sprickriskanalyser av unga betongkonstruktioner. Graden av tvång i en konstruktion eller ett konstruktionslement är nästan proportionell mot sprickrisken.

## 1.2 Inverkande faktorer och dess påverkan på sprickrisken

De huvudsakliga faktorerna som beaktas vid sprickriskberäkningar hos en betongstruktur är: temperatur- och fuktförhållanden, tvång, den unga betongens mekaniska egenskaper och egenskaper hos anslutande strukturer. Dessa huvudfaktorer är i sin tur

starkt beroende av strukturens geometri, byggmetoder, gjutförhållanden, den nygjutna betongens egenskaper och härdningsförhållanden samt inte minst väderleksförhållanden. Figur 1.1 illustrerar hur komplext de inverkan faktorerna samverkar och hur de ska behandlas vid en sprickriskberäkning. Förenklingar av figuren förekommer ofta, se t.ex. Figur 1.2.

Effekter av autogen krympning (kemisk krympning) och uttorkningskrympning är inte medtagna i Figur 1.1 och Figur 1.2. Detta skulle ha inneburit en mer komplex figur som hade varit svår att tolka. Den kombinerade effekten av krympning och temperaturrörelser är alltid närvarande. Vid användning av betong med lågt vattencementtal (lägre än 0,50) bör effekten av autogen krympning tas med i analyserna.

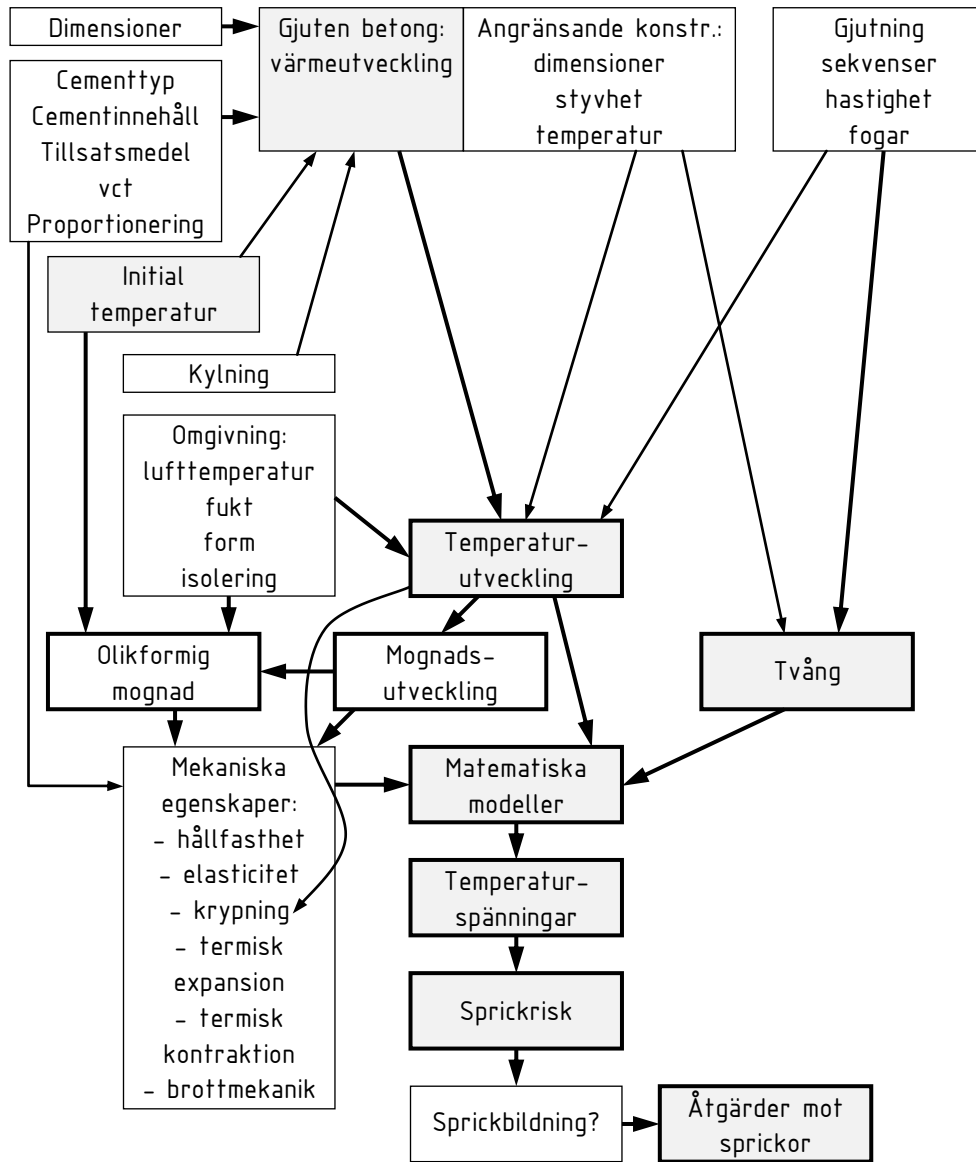
Tvånget påverkas av den generella strukturella konfigurationen t.ex. dimension, styvhet hos motgjutning och graden av vidhäftning mot denne, grundförhållanden hur konstruktionen gjuts (gjutordning, anläggande av gjutfogar etc.). Beräkningserfarenheter där tvånget varierats visar dess avgörande betydelse inte bara på spänningsnivå utan även på om betongen kommer att vara i tryck eller drag vid en viss tidpunkt efter gjutning.

Temperaturutvecklingen i en betongstruktur är beroende av de termiska egenskaperna hos betongen (hydratationsvärme, specifikt värme osv.), geometri och dimensioner av den nygjutna strukturen och motgjutning, lufttemperatur och temperatur hos motgjutning, vind, solbestrålning samt gjutförhållanden (gjuttemperatur, formtyp, isolering, artificiell kylning).

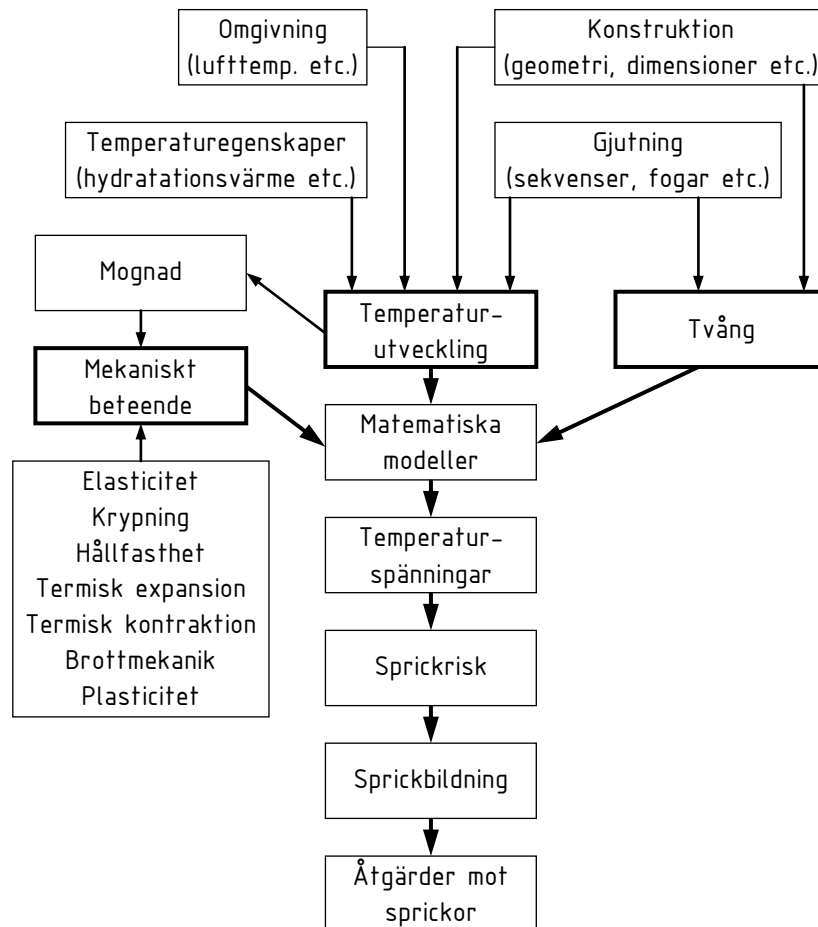
Förutom temperaturutvidgningskoefficienten har följande mekaniska egenskaper stor inverkan vid temperatursprickanalyser, elasticitet och krypning, hållfasthetsutveckling, olinjärt beteende vid höga spänningsnivåer (brottmekaniska egenskaper) och plastiska egenskaper.

Sprickriskbestämning med alla faktorer enligt Figur 1.1 kommer att ge de bästa resultaten. Framräknade spänningar eller töjningar jämförs med draghållfasthet respektive dragbrottöjning. Kontroll sker mot spännings/töjningsnivåer gällande för olika typer av strukturer och miljöklasser där konsekvens av uppsprickning värderas. Sprickhämmande åtgärder sätts in om nivån är för hög. Detta förfaringssätt gäller huvudsakligen för anläggningsbyggande; "Den Svenska Sprickmodellen", beskriven i Trafikverkets bronorm, men i många andra sammanhang gäller fortfarande temperaturkriterier. T.ex. förekommer ofta krav på begränsningar i temperaturskillnad mellan olika gjutetapper och inom gjutetapp.

## Inledning



**Figur 1.1** Analys av tidiga temperaturspänningar och sprickrisker – inverkan av faktorer. Observera att effekter av krypning (autogen krypning och uttorkningskrypning) inte är med.



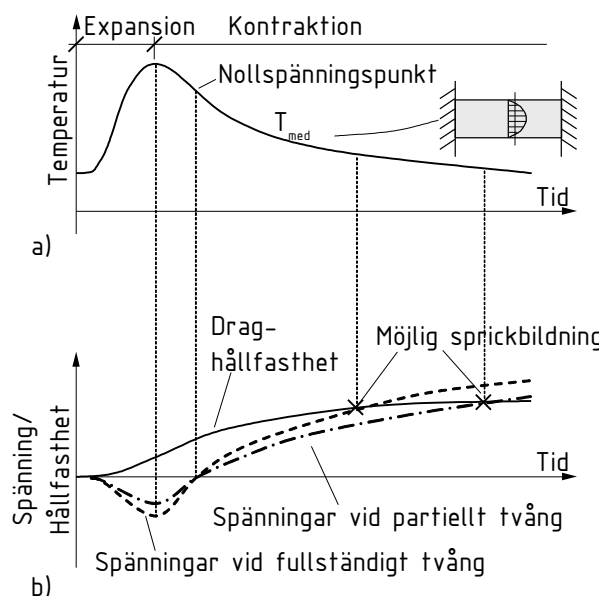
**Figur 1.2** Exempel på förenklad version av Figur 1.1. Observera att effekter av krympning (autogen krympning och uttorkningskrympning) inte är med i figurerna.

### 1.3 Uppkomst av temperatursprickor

I en nygjuten betongkonstruktion ökar temperaturen snabbt i början och avtar sedan till omgivningens temperatur samtidigt som hållfastheten ökar, se Figur 1.3. Temperaturändringarna får betongen att först utvidga sig under expansionsfasen och sedan dra ihop sig under kontraktionsfasen. Om dessa rörelser förhindras av angränsande konstruktionsdelar, grundläggning eller delar av den unga betongkonstruktionen som inte undergår samma temperaturändringsförlopp uppstår tvångsspänningar som blir större ju styvare mothållet är. Till en början uppstår tryckspänningar, men när hydratation i betongen klingar av och temperaturen börjar sjunka, övergår tryckspänning-

## Inledning

arna till dragspänningar. Om dragspänningarna blir större än betongens draghållfasthet finns det en uppenbar risk att betongen spricker, se även avsnitt 2.1. Observera i figuren effekten av tvång på temperaturspänningarnas storlek.



**Figur 1.3** Exempel på a) medeltemperatur och b) spännings- och hållfasthetsutveckling i ett hårdnande betongelement, som dels är delvis förhindrat att röra sig, dels är fullständigt förhindrat att röra sig.

### 1.4 Tidig sprickbildning av krympning

Under hårdnandet sker som tidigare nämnts även fuktrelaterade rörelser, autogen krympning och uttorkningskrympning, som bara dessa i sig kan framkalla sprickbildning.

Autogen krympning uppträder tidigt pga. hydratationen och den kemiska krympningen. Autogen krympning definieras som yttre observerad krympning utan fuktutbyte med omgivningen och vid konstant temperatur, se Hedlund (2000). Volymen hos hydrationsprodukterna är 8-10 % mindre än totala volymen av de ingående reaktionsmaterialen cement och vatten. All denna så kallade kemiska krympning sker inte utan förhindras delvis då betongen tillstyvnar pga. det skelett som formas mellan cementkorn som inte reagerat i cementpastan. Den yttre, mätbara autogena krympningen hos betongen vid en viss tid är därför mindre än den totala kemiska krympningen.

Den tidiga autogena krympningen ger upphov till dragspänningar i hela tvärsnittet vid externt mothåll av konstruktionen. För betong med lågt vattencementtal blir den

autogena krympningen ansenlig och kommer mycket tidigt. Sprickor kan uppträda t.o.m. under en pålagd plastfolie eller annan täckning.

Uttorkningskrympning sker i ett senare skede och är deformation som uppkommer under fuktutbyte med omgivningen. Fuktkvoten i porerna sjunker ned till den fuktighet som finns i omgivningen. Processen är mycket långsam och tar upp till ett år redan vid tvärsnittdimensioner större än 300-400 mm. Uttorkningskrympningen benämns oftast endast krympning och ger dragspänningar i ytskikt i frånvaro av externt tvång. Krympningen kan även framkalla problem som kantresning och spalter i gjutfogar.

I denna rapport fokuseras inte på den sprickbildning som framkallas av autogen krympning och uttorkningskrympning. Tvångssituationerna är dock i många fall tillämpbara på även krympframkallad sprickbildning.

Bestämning av tvång innefattar att ta hänsyn till många faktorer såsom:

- angränsande konstruktionsdelars styvhet
- angränsande konstruktionsdelars temperaturrörelser orsakade av den nygjutna konstruktionsdelens temperaturändringar
- eftergivligheten hos undergrund
- inverkan av uppsprickning/glidning i gjutfogar
- inverkan av tyngdkraften

Möjlig sprickbildning kan, enligt Bernander (1998), delas in i två grupper: sprickbildning under expansionsfasen och sprickbildning under kontraktionsfasen. Huvuddragen kan beskrivas enligt följande:

- Sprickbildning under expansionsfasen uppkommer både som ytsprickor och/eller som genomgående sprickor. Ytsprickor uppkommer i nyligen gjutna konstruktionselement pga. skillnader i inre rörelser i elementen. Genomgående sprickor uppkommer i äldre konstruktionselement som angränsar till nyligen gjutna, expanderande element pga. skillnad i rörelse mellan elementen. Expansionsfassprickor bildas kort efter gjutning, inom ett fåtal dagar, och tenderar att sluta sig med tiden. Inverkan av dessa sprickor på statisk bärförmåga, funktion och beständighet måste bedömas från fall till fall.
- Sprickor uppkomna under kontraktionsfasen är vanligtvis genomgående sprickor i nyligen gjutna element. Beroende på dimension, miljö och randförhållanden etc. kan de uppkomma veckor, månader och i extrema fall även år efter gjutning. Sprickor uppkomna i kontraktionsfasen är oftast genomgående, bestående, sprickor som uppkommer i nyligen gjutna element pga. att dess fria rörelser hindras av angränsande, äldre element.



## Inledning

Bestämning av belastningssituationen, dvs. kvoten mellan lasteffekt och bärförmåga; här aktuella spänningar eller töjningar dividerade med betongens draghållfasthet eller dragbrottöjning; är det fjärde steget i en uppskattning av sprickrisk enligt Figur 3.1. Detta kan göras med hjälp av finit elementmetod enligt exempelvis ConTeSt Pro (2003) eller JCI (1992). Belastningssituationen kan också uppskattas med en manuell metod se Reinius (1945), Löfquist (1946), Bernander (1982), Bernander & Emborg (1994), Emborg & Bernander (1994) och Larson (2000), eller med hjälp av diagram/databaser, se förslagsvis Emborg et al. (1997) och Jonasson et al. (2001). Metoder finns även angivna i Betonghandbok – Material (1994) och i Betonghandbok – Arbetsutförande (1994).

Det femte och sista steget enligt Figur 3.1 är *sprickriskdimensioneringen* som innebär att belastningssituationen jämförs med föreskrivna partialkoefficienter för temperatursprickriskproblem. Partialkoefficienter anges i dimensioneringsnormer såsom Bro2004 (2004) och kan bestämmas genom sannolikheteoretiska metoder; allmänt enligt exempelvis Cornell (1969), AK79/81 (1982), NKB87 (1987), Schneider (1997), och speciellt för temperatursprickriskproblem enligt Nilsson (2000) eller Rostásy & Krauß (2002).

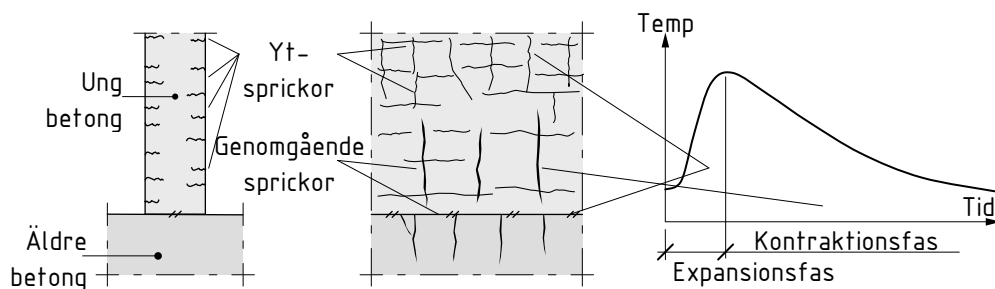
Vid för hög sprickrisk görs en förändring av förutsättningar genom t.ex. lämplig åtgärd, dvs. steg 1 i Figur 3.1.



## 2 Spricktyper, konsekvenser och strukturer

### 2.1 Klassificering av sprickor

Det är viktigt att klassificering av sprickor korresponderar till deras tillblivelse, det temporära beteendet och funktionella negativa inverkan. Det är därför lämpligt att särskilja sprickor som uppkommer i uppvärmnings- respektive avsvlningsfasen under en tidig temperaturutvecklingscykel, se Figur 2.1. Man skiljer dessutom ofta på genomgående sprickor och ytsprickor, se Tabell 2.1.



**Figur 2.1** Exempel på tidiga expansionsprickor och på kontraktionssprickor hos en vägg gjuten på tidigare gjuten sektion, Nilsson (2000).

**Tabell 2.1** Typer av temperatursprickor under expansions- och kontraktionsfaserna.

Spricktyp	Expansionsprickor (uppvärmningsfasen)	Kontraktionssprickor (avkylningsfasen)
Ytsprickor	Beror på temperaturskillnader mellan yta och centrala delar	Kan uppkomma på grund av stora temperaturskillnader,

		snabb ytavkylning (t.ex. vid formrivning och kallt väder)
<b>Genomgående sprickor</b>	Uppkommer när medeltemperaturen skiljer sig starkt mellan olika delar av den nygjutna konstruktionen. Kan också uppkomma i den anslutande strukturen	Beror på medeltemperatursänkning och samtidigt mothåll från anslutande strukturer/undergrund

### 2.1.1 Tidiga sprickor under uppvärmningsfasen

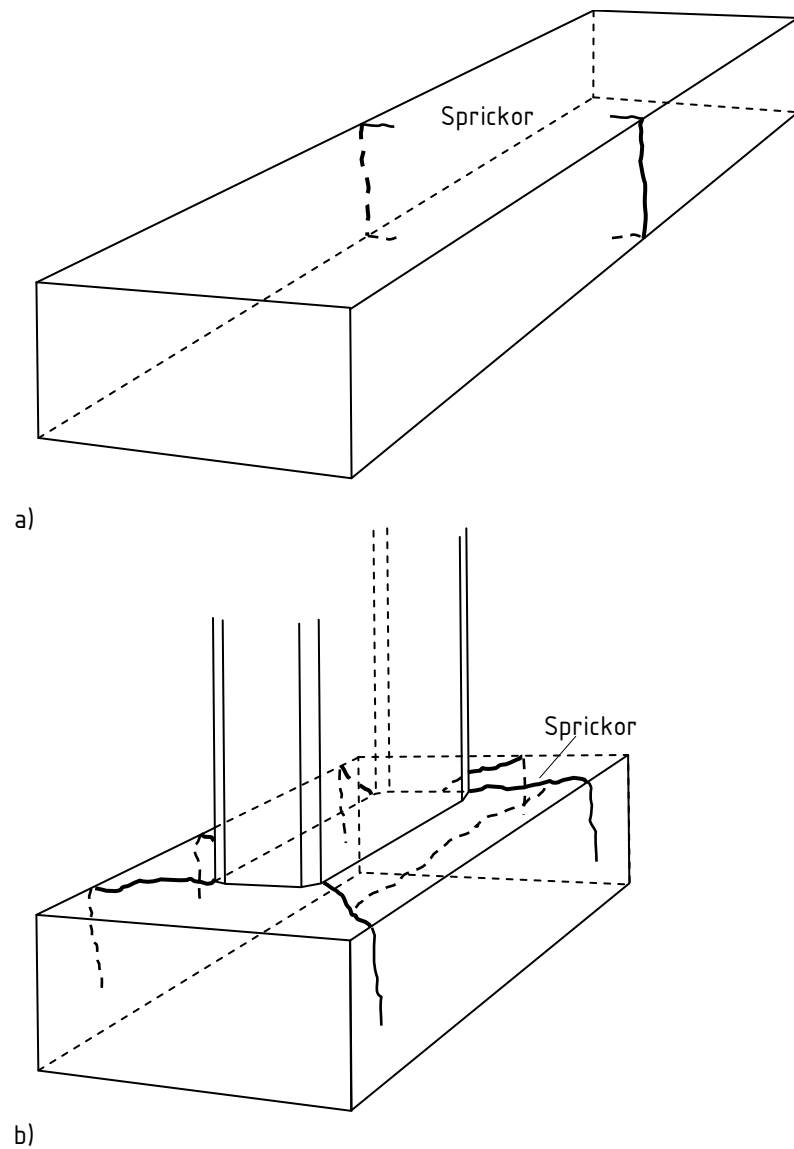
Tidiga sprickor under uppvärmningsfasen uppstår tidigt efter gjutningen (en eller några få dagar) och tenderar att slutas efter avkylningen. Mycket tidiga sprickor av denna typ är vanligtvis ytsprickor vilka förklaras av högre temperaturer i mitten av det nygjutna elementet och som inducerar större temperaturrörelser i mitten än i ytdelarna som kyls ned av omgivningen. Eftersom ojämna temperaturrörelser inte kan ske i tvärsnittet medför detta tryckspänningar i mitten och dragspänningar och eventuellt uppsprickning i ytan. Temperaturskillnader över en utsträckt fundamentplatta eller över en lådformad brosektion med tydliga skillnader i tjocklek kan generera genomgående sprickor också under uppvärmningsfasen. Genomgående sprickor kan också framkallas i en tidigare gjuten sektion som angränsar till nyligen gjutna, expanderande element pga. skillnad i rörelse mellan elementen, se exempel i Figur 2.1 och Figur 2.2.

### 2.1.2 Genomgående sprickor under avsvältningsfasen

Sprickor uppkomna under kontraktionsfasen är vanligtvis av genomgående typ i nyligen gjutna element. Beroende på dimension, miljö och randförhållanden etc. kan de uppkomma veckor, månader och i extrema fall även år efter gjutning.

Bildandet av genomgående sprickor i avsvältningskedet beskrivs lämpligen för fallet enaxiellt tvång, se kapitel 3 och kapitel 4. Genomgående sprickor relateras till medelkontraktion av hela tvärsektionen och uppstår således i hela tvärsnittet. Bildandet av genomgående sprickor i avsvältningskedet kan simuleras och studeras med försöksmetoderna Sprickramen och Temperaturspänningsmaskinen.

## Tvångsfall



**Figur 2.2** Genomgående sprickor under uppvärmningsfasen a) i det nygjutna elementet som ett resultat av olika medeltemperaturer över tvärsektionen och b) i den anslutande strukturen beroende på en expansion av den nygjutna betongen.

### 2.2 Alternativ klassificering av sprickor

I motsats till den rekommenderade klassificering av sprickor enligt ovan, har sprickor traditionellt även delats in i

a) genomgående sprickor, uppkomna från temperaturrelser mothållna av ett så kallat yttre tvång eller

b) ytsprickor, framkallade från olikformade temperaturrelser mothållna av ett så kallat inre tvång.

I båda fallen kan temperaturfördelningen som ger upphov till rörelserna liksom tvånget vara asymmetriskt vilket innebär att böjspänningar och böjsprickor kan uppkomma. Förfaringsättet med indelning i genomgående sprickor och ytsprickor har historisk haft en stor tillämpning. T.ex. gör man i Tyskland en indelning i egenspanningar och längsgående spänningar. Man förstår indelningen eftersom egenspanningar ofta är två- och tredimensionella och framkallar ytsprickor under det att de längsgående spänningarna ofta är en- eller tvådimensionella och framkallar genomgående sprickor. Indelningen kan därför vara motiverad för många enklare situationer.

Det måste dock noteras att indelningen i ett inre och ett yttre tvång är förvirrande ur en strukturmekanisk hållningspunkt. Detta beror helt enkelt på att beroende hur den strukturella modellen utförs kan element som skall gjutas och element som tillhör den "yttre" strukturen modelleras tillsammans eller separat. Det som är yttre tvång från anslutande tidigare gjutna sektioner kan bli ett inre tvång om också dessa sektioner inkluderas i modellen. Dessutom skall, enligt grundläggande strukturmekaniska principer, alla spänningar uppkomna från volymändringar definitionsmässigt betraktas som egenspanningar. Om man t.ex. i en FEM-analys inkluderar alla motgjutna element och undergrund blir alla tidiga spänningar faktiskt inre spänningar eller egenspanningar.

Följaktligen synes termerna yttre tvång och inre tvång vara en irrationell grund för klassificering av sprickor.

Det kan dock vid förenklad beskrivning av fenomenet, speciellt när endast den nygjutna betongen är av intresse, ibland vara acceptabelt att använda termerna inre och yttre tvång. I denna rapport studeras fastlåsningseffekterna utanför anslutande strukturer dvs. ett yttre tvång.

### **2.3 Strukturer och typfall där temperatursprickor kan uppkomma**

Traditionellt har tidig temperatursprickbildning fokuserats på massiva dammar och liknande element. Strävanden efter högre krav på hållfasthet och beständighet för andra typer av konstruktioner än dessa innebär ett större hänsynstagande även måste tas här.

Eftersom gjutmetoder, betongkvaliteter, tvångssituationer etc. inte är identiska för mycket stora betongelement och andra element osv kan det vara lämpligt att skilja mellan a) massiva betongkonstruktioner, b) mellanstora betongkonstruktioner och c) slankare betongkonstruktioner.

### 2.3.1 Massiva betongkonstruktioner

Historiskt inriktades problemen med tidig sprickbildning först till storslagna betongdammar och fundament. Det var därför som termen "massivbetong" etablerades och åtgärder mot tidig sprickbildning fokuserades till att reducera temperaturhöjningen t.ex. genom reduktioner av cementmängd och val av cement med låg värmeutveckling samtidigt som givetvis allmänna krav på hållfasthet, täthet osv. bibehölls.

Typiska massiva betongkonstruktioner innehåller lite eller t.o.m. ingen armering. Dammar, fundament och plattor till bropelare, pyloner och grundläggningskonstruktioner till hängbroar och snedkabelbroar är exempel på massiva betongkonstruktioner. Sprickproblemen för dessa typer av konstruktioner relateras till höga maximala temperaturer och stora temperaturskillnader mellan inre delar, där i stort sett adiabatiska förhållanden råder, och ytdelar vila mer eller mindre direkt exponeras till omgivningen.

### 2.3.2 Mellanstora konstruktioner

Mellanstora konstruktioner representerar en lång rad av strukturtyper t.ex. brobalkar, pyloner och pelare, tunnlar, stödmurar, hamnkajer, pিরer/vågbrytare, offshore-konstruktioner, vattenreservoarer, vattenreningsverk, fundamentplattor. Höga hållfasthetskrav, funktionskrav och beständighetskrav innebär låga vattencementtal och samtidigt höga cementmängder för att säkerställa god arbetbarhet. Betongkvaliteter upp till C35/45 och vattencementtal lägre än 0,45 används ofta till mellanstora konstruktioner. Alla dessa krav tenderar att generera höga hydratationstemperaturer och därigenom problem med sprickbildning. Dessutom innebär de låga vattencementtalen att ansenlig autogen krympning förekommer under kylningsfasen vilket tillsammans med en mindre eftergivlig betong förvärrar sprickrisken.

### 2.3.3 Tunnare strukturer

För tunnare strukturer kan genomgående sprickor vara ett bekymmer speciellt om höga krav finns på hållfasthet och beständighet som medför en spröd betong med stor autogen krympning på samma sätt som ovan. Den primära sprickframkallande faktorn är inte temperaturutvecklingen utan det är skillnaden mellan gjuttemperatur och avslutande konstruktioners lägre temperatur som kan vara problemet. Tunnare strukturer är dessutom ofta utsatta för höga tvång från motgjutning/undergrund genom deras relativt små dimensioner. Genomgående sprickor är därför inte ovanliga för cistern-/bassängväggar, broöverdelar, vägbeläggningar, källarväggar och golvplattor.

## 2.4 Strukturella konsekvenser av sprickor

Generellt medför sprickor reducerad funktion, beständighet och estetiskt intryck. För många konstruktioner som är lokaliserade i aggressiva miljöer där kemisk och mekanisk nedbrytning förekommer, är det avgörande att kvalitetskrav uppnås under byggskedet och bibehålls under brukstiden, dvs. att betongen hålls sprickfri. Det är faktiskt

så att tidiga rörelser och sprickbildning kan utgöra det mest allvarliga lastfallet över huvudet taget för en konstruktion.

Forskning och praktiska erfarenheter visar att kvaliteten och livslängd till stor del beror på hur den färska och hårdnande betongen behandlas. Initiala felaktigheter som t.ex. tidig sprickbildning skall därför undvikas. Detta är dessutom ekonomiskt försvarbart då det kan kosta 1000-20000 kr/m. Ofta förekommer kriterier beträffande sprickbildning i byggnormer i form av maximal sprickvidd ( $w_{\max}$ ) från 0,05 mm (i stort sett sprickfrihet) till 0,2-0,1 mm (AMA anläggning) och ibland 1 mm. Allt beroende på konstruktionens tillämpning.

I en oarmerad konstruktion är sprickbildning mycket allvarlig för funktionen av monoliten oavsett sprickvidd. Vidare är konsekvensen av sprickor i ett långt element med låg armeringsmängd allvarigare (ger större sprickvidder) än i ett kortare element med hög armeringsmängd. Därför måste den högsta tillåtna spänningsnivån av mothållna rörelser anpassas till de specifika kraven beträffande teknisk kontext. Å andra sidan visar erfarenheten att grövre sprickor är enklare att reparera (injektera) än finare sprickor. Detta faktum komplicerar följaktligen frågan.

Dessutom är det så att sprickor som bildas under uppvärmningsfasen normalt tenderar att gå igen under den efterföljande avsvlningsfasen. Effekten av dessa sprickor på funktion, beständighet osv. är troligen mindre och eventuella skador bör bedömas från fall till fall. Generellt anses dock att ytsprickor under uppvärmningsfasen verkligen har en viss nedsättande effekt på beständighet speciellt om samtidig krympning pågår, omgivningens temperatur ändras och yttre aggressiva miljöomständigheter föreligger.

Sprickor bildade under avsvlningsfasen tenderar däremot att förbli öppna och är följaktligen mer kritiska beträffande funktion och beständighet. Därför borde striktare krav gälla för undvikande av genomgående avsvlningssprickor än för ytliga uppvärmningssprickor.



## 3 Sprickriskberäkningar

### 3.1 Uppskattning av sprickrisk av temperaturrörelser

Uppskattning av sprickrisker i unga betongkonstruktioner pga. tidigt temperaturförlopp kan baseras på fem efterföljande steg, se Figur 3.1. I det *första steget* ges allmänna förutsättningar: typ av konstruktion, materialegenskaper och tänkbara eventuella åtgärder för att undvika sprickor. I det *andra steget* bestäms temperaturutvecklingen, antingen genom beräkningar, diagram/databaser eller genom mätningar. Det *tredje steget* innefattar uppskattning av tvångssituationen. I det *fjärde steget* följer beräkningar av spännings- eller töjningsförhållanden, dvs. den maximala dragspänningen eller dragtöjningen jämförs med draghållfastheten respektive dragbrottöjningen. Det *femte steget* innebär en uppskattning av sprickrisken gärna baserad på partialkoefficienter, vars inverser spännings- eller töjningsförhållandena inte ska överskrida. Om sprickrisken är för hög väljs en lämplig åtgärd för att t.ex. minska temperaturutvecklingen, och/eller tvång och nya beräkningar sker enligt kedjan. Ofta görs startberäkningar utan någon speciell åtgärd. För mer grundläggande och djupgående beskrivning av sprickriskbedömningar, se exempelvis Emborg & Bernander (1994), RILEM (1998), Rostásy et al. (2001) and Emborg et al. (2003).

Det första steget i Figur 3.1, *inledande förutsättningar: val av konstruktion, material och eventuella åtgärder*, är primär bas för resultatet av en uppskattning av risken för temperatursprickor i unga betongkonstruktioner. Väl vald typ av konstruktion och dimensioner tillsammans med passande betong utgör grunden för den sprickrisk som kommer att uppträda. Eventuella sprickriskminskande åtgärder kan behövas såsom kylning av hydratiserande delar, se Bernander (1973 & 1998), och/eller värmning av angränsande och äldre delar, se Wallin et al. (1997). Andra, tidigare åtgärder är föreskrifter om rörelsefogar, se exempelvis Harrison (1981), eller begränsning av temperaturdifferenser i olika delar av konstruktioner genom användning av långsamthård-

nande cement, se Fagerlund (1985). Erfarenhetsmässigt har det visats sig att kombination av flera olika sprickmotverkande åtgärder är ibland nödvändig i vissa situationer och kan med fördel ansättas direkt vid en beräkning.

Det andra steget i Figur 3.1 avser *temperaturutvecklingen* under hydratationsfasen, som bestäms antingen genom finita elementmetodberäkningar, se exempelvis Hett97, ConTeSt Pro (2003) eller Kanstad et al. (2001); från diagram eller databaser, se exempelvis Jonasson et al. (2001); från mätningar i verkliga konstruktioner, se Heimdal et al. (2001a & b); eller från erfarenheter från liknande, tidigare gjutna konstruktioner.

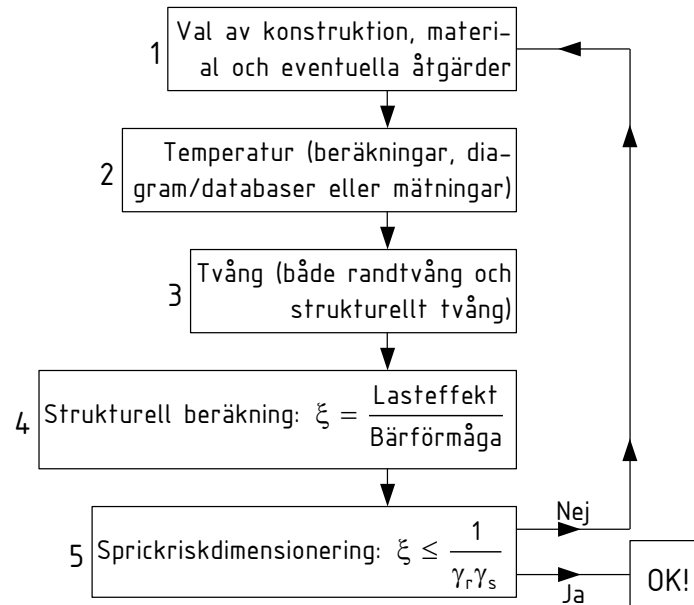
Som det tredje steget måste *tvångssituationen* bestämmas inkluderande tvånget i det studerade elementet, i gränsytan (fogen) mellan delar i konstruktioner, från angränsande konstruktionselement eller mark och berg. I Reinius (1945), ACI (1973, 1990 & 1995), Stoffers (1978) och Harrison (1981), presenteras tvånget i väggelement som är helt fastlåsta längs bottenranden. I Emborg et al. (1997) visas flera olika tvångssituationer och i Larson (1999 & 2000) undersöks tvånget från angränsande konstruktioner. För bestämning av randtvång från angränsande grundläggningmaterial finns olika ingenjörsmetoder att finna i Rostásy et al. (1998) och (2001). I exempelvis Bernander (1993) och i Nilsson (1998 & 2000) anges även en metod för att uppskatta graden av rotationsrandtvång. Bernander (2001) beskriver en metod för det transversella randtvånget. Mer omfattande beskrivning av olika tvångssituationer och rekommenderade värden och/eller referenser finns angivna i kapitel 5.

Bestämning av belastningssituationen, dvs. kvoten mellan lasteffekt och bärförmåga, här aktuella spänningar eller töjningar dividerade med betongens draghållfasthet eller dragbrottöjning, är det fjärde steget i en uppskattning av sprickrisk enligt Figur 3.1. Detta kan göras med hjälp av finita elementmetod enligt exempelvis ConTeSt Pro (2003) eller JCI (1992). Belastningssituationen kan också uppskattas med manuella metoder se Reinius (1945), Löfquist (1946), Bernander (1982), Bernander & Emborg (1994), Emborg & Bernander (1994) och Larson (2000), eller med hjälp av diagram/databaser, se förslagsvis Emborg et al. (1997) och Jonasson et al. (2001). Metoder finns även angivna i Betonghandbok – Material (1994) och i Betonghandbok – Arbetsutförande (1994).

Det femte steget enligt Figur 3.1 är *sprickriskdimensioneringen* som innebär att belastningssituationen jämförs med föreskrivna partialkoefficienter för temperatursprickriskproblem. Partialkoefficienter anges i dimensioneringsnormer såsom Bro2004 (2004) och kan bestämmas genom sannolikhetsteoretiska metoder; allmänt enligt exempelvis Cornell (1969), AK79/81 (1982), NKB87 (1987), Schneider (1997), och speciellt för temperatursprickriskproblem enligt Nilsson (2000) eller Rostásy & Krauß (2002).

## Tvångsfall

Vid för hög sprickrisk görs en förändring av förutsättningar genom t.ex. lämplig åtgärd och nya beräkningar sker enligt steg 1 i Figur 3.1.



**Figur 3.1** Beskrivning av den principiella gången i uppskattning av sprickrisk i unga betongkonstruktioner. Nilsson (2000).  $\xi$  är spännings- eller töjningsförhållandet och  $\gamma_r \gamma_s$  är partialkoefficienter.

Ofta antas det i uppskattningar av sprickrisker att strukturers tvärsnitt förblir plana under deformationen. Följaktligen kan effekten av undergrund av friktionsmaterial (såsom grus) på ett enkelt element (platta eller fundament) eller en sammansatt struktur (vägg på platta, tunnelelement osv.) modelleras under antagande om passande grad av frihet i translation och böjning. Denna metod är tillämpad i kompensationslinje- och kompensationsplans-teorierna, se avsnitt 3.2.3.

Antagandet om att plana tvärsnitt förblir plana under deformationen gäller för strukturer med längd-höjd-förhållande större än eller lika med fem, dvs.  $L/H \geq 5$ . För mindre längd-höjd-förhållanden och för vissa situationer är det möjligt att justera tvånget för kombinerad translation och böjning.

Det kan vara av avgörande vikt att definiera den mest kritiska delen i en struktur utgående från tvånget i den bestämmande punkten,  $\gamma_R$ . För fall med  $L/H \geq 5$  definieras tvångskoefficienten som en så kallad plant tvärsnitts tvångs koefficient  $0 \leq \gamma_R^0 \leq 1$ .

### 3.2 Metoder för sprickriskberäkningar

#### 3.2.1 Den enaxiella enpunktsmetoden

Metoden går ut på att för en given lokalisering i en struktur ta fram tvånget genom något av de föreslagna förfaringssätten enligt kapitel 4. Därefter beräknas sprickrisken.

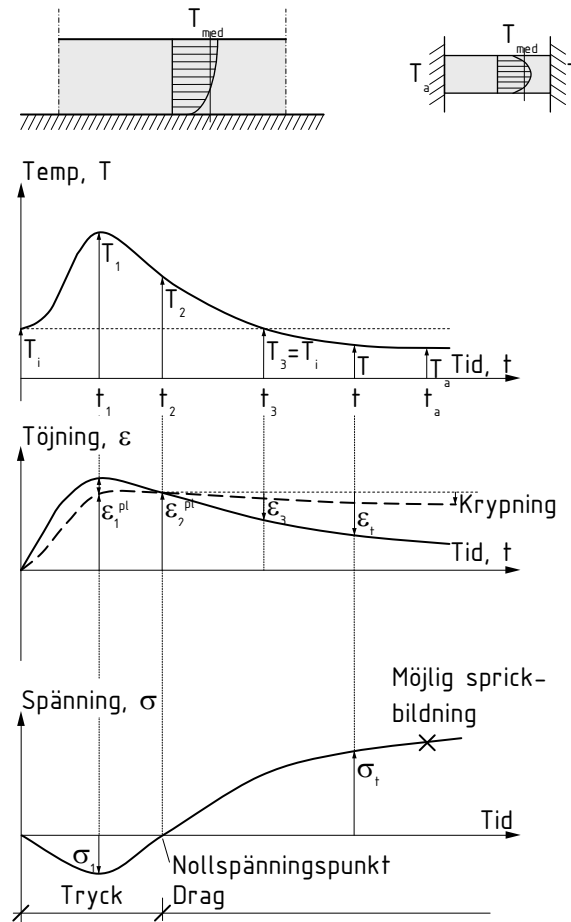
Metodiken är speciellt tillämpbar när huvudspänningen i en riktning är betydligt större än den i ortogonala riktningen. Den mest kritiska punkten i konstruktionen identifieras dvs. där sprickrisken bedöms vara högst. Bedömningsgrunden innehåller hänsynstagande till temperaturfält och grad av tvång. Metoden refererar till genomgående sprickor under avsvlningsfasen enligt tidigare (se t.ex. Figur 1.3). Därefter, kan man med någon av metoderna nedan separat beräkna risker för ytsprickor under uppvärmningsfasen.

Enpunktsmetoden används även för kalibrering av teoretiska modeller mot laboratorieförsök (de tidigare nämnda Temperaturspänningsriggen och Sprickramen) där verkligt beteende simuleras.

Flera beräkningsmodeller har upprättats för den enaxiella tvångssituationen. Exempelvis etablerade Bernander (1973) och Bernander & Gustavsson (1981) ekvationer för handberäkning/programmering på miniräknare. Metoden kan illustreras i Figur 3.2. Under uppvärmningsfasen absorberas huvuddelen av temperaturutvidgningen som plastiska töjningar,  $\varepsilon_1^{pl}$ , och endast en mindre del utgörs av elastiska trycktöjningar,  $\varepsilon_1^{el}$ , vilka ger upphov till tryckspänningar. Under avsvlningsens första del innebär sammandragningen av den nu mycket styvare betongen att alla tryckspänningar snart reduceras till noll vid tidpunkten  $t_2$ . Temperaturen  $T_2$  vid tiden  $t_2$  benämns därför ofta nollspänningstemperaturen. Den fortsatta avsvlningen efter  $T_2$  framkallar dragtöjningar och dragspänningar i betongen och så småningom överskrider dessa dragbrott-töjningen (dragspänningen) med uppsprickning som resultat.

Återstående elastisk töjning  $\varepsilon_t$  (eller spänning  $\sigma_t$ ) beräknas för den fortsatta avsvlningen och jämförs med dragbrottöjningen  $\varepsilon_u$  (eller draghållfastheten). Metoden baseras på följande formler, se Betonghandbok – Material (1994).

## Tvångsfall



**Figur 3.2** Bildande av genomgående sprickor under den tidiga temperaturcykelns avsvlningsfas. Schematiska plottar av medeltemperatur, töjning och spänning i ett element utsatt för enaxligt ändtvång. Ursprungligen från Löfquist (1946), tidigare även omarbetat av Bernander (1973).

$$\varepsilon_t = \alpha_c (T(t_2) - T_a) \gamma_R \quad (3.1)$$

$$T(t_2) = (T_{\max} - T_i) \left( 1 - \frac{\alpha_e}{\alpha_c} (1 - k_0) \right) + T_i \quad (3.2)$$

där  $\varepsilon_t$  är dragtöjningen fr.o.m. tiden  $t_2$ ,  $T_a$  är temperaturen som konstruktionen svalnar till,  $T(t_2)$  är temperaturen då tryckspänningarna övergår till dragspänningar ("nollspänningstemperaturen"),  $T_{\max}$  är maximal temperatur,  $T_i$  är gjuttemperaturen och  $\alpha_e$  och  $\alpha_c$  är temperaturidvidgnings- respektive temperaturkontraktionskoefficienterna. Koefficienten  $k_0$  anger hur stor del av den förhindrade totala deformation som är plastisk

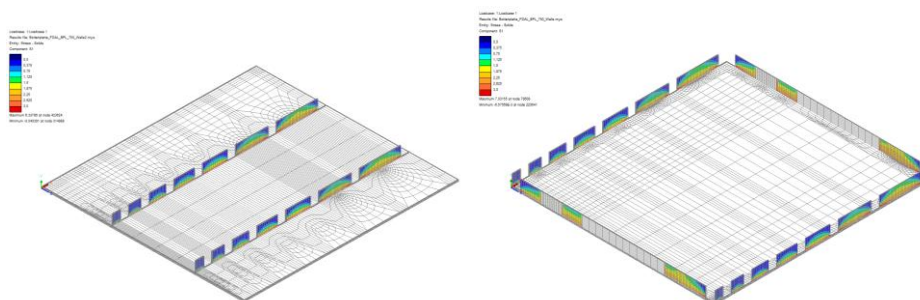
och utgör plasticeringen i expansionsskedet, se Figur 3.2. och det partiella tvånget  $\gamma_R$  kan modelleras enligt ekv. (4.4), (4.5) och (5.1).

Ekv. (3.1) och (3.2) kan även uttryckas som spänningar, se Betonghandbok – Material (1994).

Mer komplexa beräkningsmodeller kan appliceras på fallet med den enaxiella tvångssituationen, t.ex. genom användning av superpositionsprincipen och differentielle metoder. Utförliga beskrivningar av metoderna, (t.ex. den så kallade Rate of Creep metoden), som har använts i olika kommersiella program (t.ex. ConTeSt Pro (2003) och CraX1 (2003)) ges i t.ex. Emborg (1989). Se även Betonghandbok – Material (1994) och Jonasson (1994).

### 3.2.2 Trestegsmetoden (ingenjörsmetod enligt Skanska)

Genom förenklingar simuleras det verkliga fallet med två sammanfogade element representerande den nygjutna respektive den mothållande strukturen. Inledningsvis bestäms betongens egenskaper i tidig ålder på vanligt sätt för den nygjutna konstruktionen. I ett andra steg bestäms tvånget genom en tvådimensionell, eller om nödvändigt, en tredimensionell elastisk analys (FEM), se Figur 3.3.

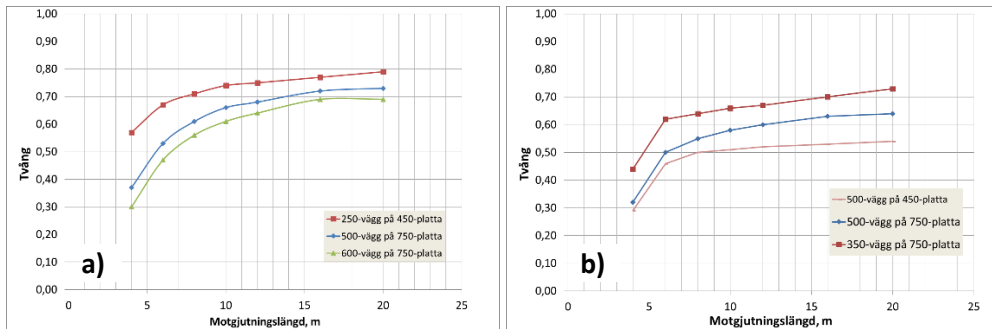


**Figur 3.3** Beräknat (3D FEM-modell) tvång några väggetapplängder gjutna på bottenplatta där a) vägg placerad mitt på bottenplattan respektive b) vägg placerad på kanten av bottenplattan.

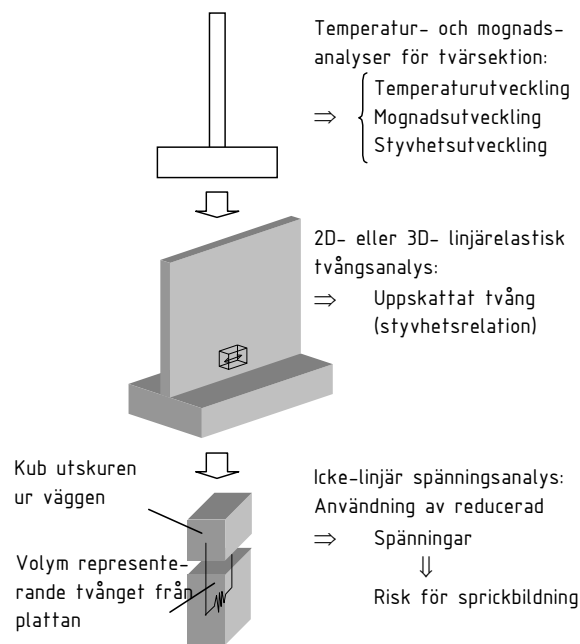
Tvånget, eller egentligen styvhetsrelationen mellan det nygjutna elementet och motgjutningen, utgör basen för den reduktion av det verkliga fallet till endast en beräkningsmodell representativ för den dimensionerande punkten, som sker i det tredje steget (– därav namnet Trestegsmetoden), se Figur 3.4. Efter att tvånget bestämts kan såväl avancerade beräkningsprogram som enkla handberäkningsmetoder appliceras för sprickriskestämning.

## Tvångsfall

Metoden har visat sig vara mycket effektiv vid tidiga sprickriskberäkningar t.ex. i såväl tidiga skeden, där en tidig överslagsmässig uppfattning om situationen är efterfrågad. Metodens tillförlitlighet är i hög grad beroende av hur väl den elastiska analysen kan simulera det verkliga tvångsförhållandet.



**Figur 3.4** Beräknat tvång i dimensionerande punkt för några väggar gjutna på stor bottenplatta. Diagram a) vägg placerad mitt på bottenplattan respektive b) vägg placerad på kanten av bottenplattan.



**Figur 3.5** Trestegsmetoden där reduktion av tvångssituation sker och endimensionella spänningsberäkningar utförs med hjälp av två element alternativt ett element och en dimensionerande tvångsfaktor.

### 3.2.3 Kompensationslinjemetoden (plan böjning – 1D)

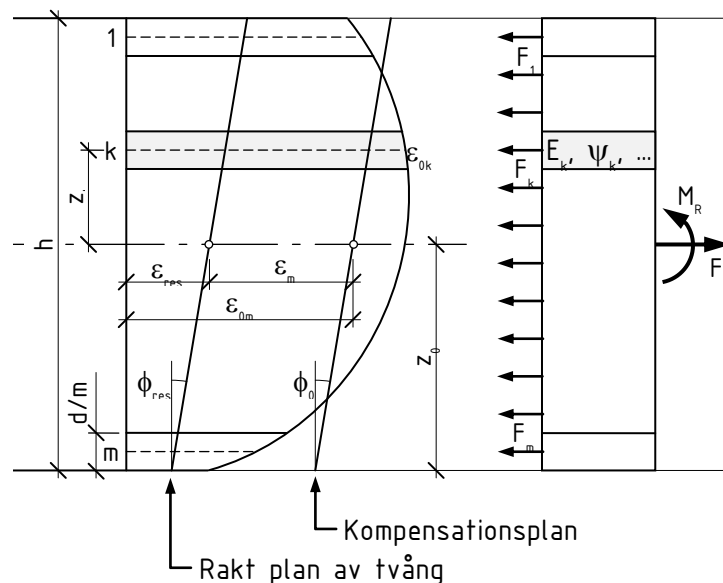
Den aktuella strukturen studeras som en balk indelad i diskreta laminära skikt, Figur 3.6 och beräkningar sker enligt balkteori. Metoden förutsätter att tvärsektion förblir plan vid böjning enligt Naviers balkteori. Det plan i balken i vilket jämvikt föreligger beträffande töjningsfördelning kallas Kompensationslinjen ("Compensation Line"). Effekten av längsgående translation och böjning i balken modelleras genom att lokalisera planet och tillämpa kraft och momentjämvikt i balkens riktning ledande till:

$$\int \sigma dA = 0 \quad ; \text{ (normalkraft)} \quad (3.3)$$

$$\int \sigma z dA = 0 \quad ; \text{ (moment i en riktning)}$$

där  $\sigma$  är temperatur- eller krympinducerad spänning och  $z$  är avståndet från neutrala lagret. Anslutande strukturer eller undergrund kan modelleras som egna lager i balken. Full vidhäftning/samverkan gäller i alla fogar.

Alternativt kan tvång från anslutande strukturer eller undergrund, som inte är inkluderad i skiktindelningen, modelleras som externa effekter innebärande att integralernas värden ovan skiljer sig från noll. Metoden kan tillämpas både för genomgående sprickor och ytsprickor.



**Figur 3.6** Indelning av struktur i ett antal ( $m$ ) diskreta laminära skikt med individuell tjocklek ( $h/m$ ) och materialegenskaper ( $E_k, \psi_k$ ).  $\epsilon_{res}$  anger trans-



Tvångsfall

*lotionstöjningen för hela strukturen och  $\phi_{res}$  anger graden av böjning hos strukturen.  $z_k$  är avståndet till neutrala lagret,  $M_R$  och  $F_R$  är momentet och axiella kraften i tvärsnittet. (som då skall vara i jämvikt).*

*Kompensationsplansmetoden (plan böjning – 2D)*

Kompensationsplansmetoden (plan böjning i två riktningar) har samma egenskaper som den endimensionella metoden enligt ovan med den skillnaden att böjning i balken också tillåts i den ortogonala riktningen och ett jämviktsplan etableras, Kompensationsplanet ("Compensation Plane"). Om inget tvång finns från någon anslutande struktur eller undergrund erhålls de interna spänningarna för elementen genom lokalisering av det plan (Kompensationsplan) så att de tre integralerna nedan blir noll

$$\begin{aligned}\int \sigma dA &= 0 && \text{; (normalkraft)} \\ \int \sigma_{x,z} dA &= 0 && \text{; (moment i en riktning)} \\ \int \sigma_{y,z} dA &= 0 && \text{; (moment i den ortogonala riktningen)}\end{aligned}\tag{3.4}$$

*Finita elementmetoden (2D, 2,5D och 3D)*

Många entreprenörer, konstruktörer och forskare har idag erfarenhet att använda finita elementmetoden (FEM) för två- och tredimensionella temperaturberäkningar i nygjutna betongkonstruktioner. Många kommersiella program är specialiserade på ung betong och är försedda med lättanvända pre- och postprocessorer för indata respektive resultatpresentation, t.ex. DIANA, HACON-T, 4C-Temp&Stress.

Det är vanligt att även temperaturspänningar och tvångsfaktorer beräknas med FEM-programmen ovan. Man bör dock beakta att vid FEM-beräkningar av tvångspänningar, måste stor möda läggas till att säkerställa att vederhäftiga modeller och materialdata används för den unga betongens mekaniska egenskaper. Tydlighet är ett måste beträffande hur materialdata tas fram i försök och hur FEM-programmet behandlar dessa. Speciellt bör kontrolleras hur krypning (viskoelastiska egenskaper) modelleras liksom olinjärt beteende vid höga dragspänningar.

FEM-programmen är som tidigare nämnts mycket lämpliga för elastiska beräkningar av tvångsfaktorer för förenklingar av mer komplicerade konstruktiva situationer (t.ex. enligt Trestegsmetoden). Här kan standardutformade FEM program användas.

### 3.3 Semi-analytisk modell för uppskattning av tvång

Tvånget  $\gamma_R$  i en ung betongkonstruktionsdel kan allmänt definieras som kvoten mellan huvudspänningen vid den aktuella tidpunkten efter gjutning  $\sigma_1$  och spänningen av krymp- och temperaturtöjning vid absolut fastlåsning ( $\varepsilon \equiv 0$ )  $-\zeta E_{28c} \Delta \varepsilon_c^0$

$$\gamma_R^0 = \frac{\sigma_1}{-\zeta E_{28c} \Delta \varepsilon_c^0} \quad (3.5)$$

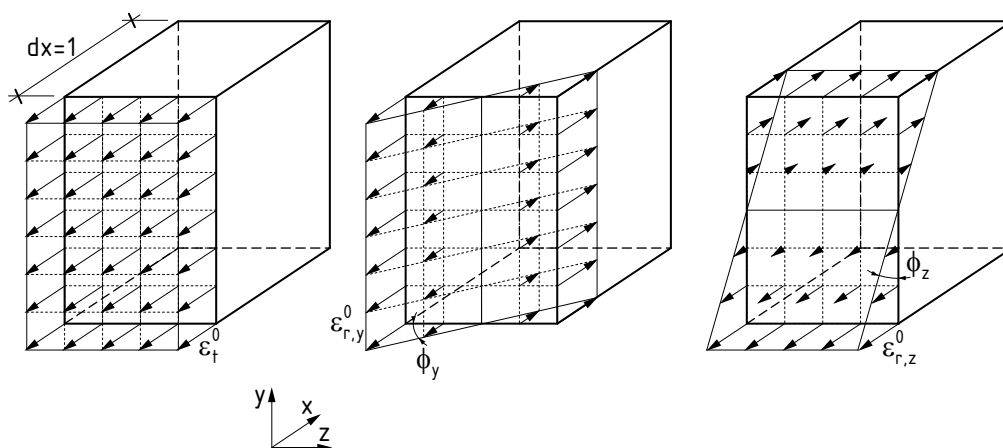
där  $\Delta \varepsilon_c^0$  är töjning av volymändring (krympning och temperatur),  $E_{28c}$  är den nygjutna betongens elasticitetsmodul vid 28 dygn och  $\zeta$  är en faktor som tar hänsyn till den unga betongens ålder relativt 28 dygn.

Huvudspänningen i en studerad punkt bestäms som

$$\sigma_1 = \zeta E_{28c} (-\Delta \varepsilon_c^0 + \varepsilon_t^0 + \varepsilon_{r,y}^0 + \varepsilon_{r,z}^0) \quad (3.6)$$

där  $\varepsilon_t^0$  är töjning av translation och  $\varepsilon_{r,y}^0$  och  $\varepsilon_{r,z}^0$  är töjning av rotation kring y- respektive z-axlarna, se Figur 3.7. Tvånget kan nu skrivas som

$$\gamma_R^0 = \frac{-\Delta \varepsilon_c^0 + \varepsilon_t^0 + \varepsilon_{r,y}^0 + \varepsilon_{r,z}^0}{-\Delta \varepsilon_c^0} \quad (3.7)$$



**Figur 3.7** Möjliga deformationer a) translation, b) rotation kring y-axeln och c) rotation kring z-axeln för ett bestämmande tvärsnitt.

Ovanstående uttryck gäller för långa konstruktioner, dvs. med längd-höjdförhållande större än ca. sju,  $L/H_v > 7$  (plana tvärsnitt förblir plana vid böjning), och för fall där ingen glidning sker i och omkring gjutfogen mellan ung och gammal betong. För kortare konstruktioner och konstruktioner med möjlig glidning tas hänsyn till detta genom att multiplicera  $\gamma_R^0$  med en resiliensfaktor  $\delta_{res}$  respektive en glidfaktor  $\delta_{glid}$  så att

$$\gamma_R = \delta_{res} \delta_{glid} \gamma_R^0 = \delta_{res} \delta_{glid} \frac{-\Delta \varepsilon_c^0 + \varepsilon_t^0 + \varepsilon_{r,y}^0 + \varepsilon_{r,z}^0}{-\Delta \varepsilon_c^0} \quad (3.8)$$

Tvångsfall

Detta uttryck kan delas upp i en translationsdel och en rotationsdel enligt

$$\gamma_R = \delta_{res} \delta_{glid} - \frac{\delta_{res} \delta_{glid} \epsilon_t^0}{\Delta \epsilon_c^0} - \frac{\delta_{res} \delta_{glid} \epsilon_{r,y}^0}{\Delta \epsilon_c^0} - \frac{\delta_{res} \delta_{glid} \epsilon_{r,z}^0}{\Delta \epsilon_c^0} =$$

$$\gamma_R = \delta_{res} \delta_{glid} - \gamma_R^t - \gamma_R^y - \gamma_R^z \quad (3.9)$$

Beroende på randvillkoren – translationsrandtvånget  $\gamma_{RT}(x)$  och rotationsrandtvånget  $\gamma_{RR,y}(x)$  och  $\gamma_{RR,z}(x)$  – kommer storleken på tvånget att variera enligt, se Nilsson, M (2003a),

$$\gamma_R = \delta_{res} \delta_{glid} - (1 - \gamma_{RT}) \gamma_R^t - (1 - \gamma_{RR,y}) \gamma_R^y - (1 - \gamma_{RR,z}) \gamma_R^z \quad (3.10)$$

vilket kan ses som en semi-analytisk metod, se Nilsson, M (2003a), där den första delen  $\delta_{res} \delta_{glid}$  utgör semi-delen pga. det ickelinjära beteendet i höga väggar och resten den analytiska delen.

För tillämpning kan ekv. (3.10) utvecklas utgående från teorin om utjämnande plan (Compensation Plane Theory), se JCI (1992), och användning av ett tillvägagångssätt för beräkning av spännbetongbalkar enligt Collins & Mitchell (1991). Metoden förutsätter en ung betongdel som gjuts mot en angränsande del och med jämn och elastisk kontraktion i respektive del och lyder.

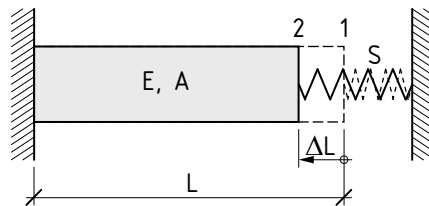


## 4 Grad av tvång – det enaxiella tvånget

### 4.1 Bakgrund

Vid beskrivning av uppkomst av temperatur- och krymprelaterad sprickbildning refereras ofta till den enaxiella tvångssituationen. Situationen tydliggör spänningsuppbyggnad under en upphettnings- och avsvlningscykel, uppkomsten av den genomgående sprickan under avsvlningsfasen och inverkan av graden av mothåll, se t.ex. avsnitt 1.3 med Figur 1.3 och avsnitt 3.2.1 med Figur 3.2.

Enaxiellt tvång innebär logiskt att tvångseffekter i andra vinkelräta riktningar försummas. Den välkända visualiseringen av enaxiellt tvång enligt Figur 4.1 används ofta vid beskrivning och modellering av de förhållanden som uppkommer i spänningsriggar i laboratorier. Stödets eventuella eftergivlighet, fjädern i Figur 4.1, kan tilldelas egenskaper oberoende av spänningstyp, men stödet kan också ha olika egenskaper i tryck eller drag.



**Figur 4.1** Enaxiellt tvång där graden av mothåll modelleras med en elastisk fjäder med fjäderskonstanten  $S$ .

### 4.2 Modellering

#### 4.2.1 Grad av tvång – generellt

Graden av enaxiellt tvång i en struktur kan kvantifieras genom att jämföra den aktuella fria töjningsändringen  $\Delta\varepsilon^0$  pga. Temperatur- och/eller fuktändring med den aktuella töjningsändringen  $\Delta\varepsilon$ , som verkligen uppkommer i strukturen.

Tvånget  $\gamma$  (ofta i litteraturen benämnt  $\kappa$  eller  $R$ ) som påverkar en nygjuten sektion kan uttryckas enligt

$$\gamma = \frac{\Delta\varepsilon^0 - \Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon^0} \quad (4.1)$$

Om  $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^0$  är tvånget noll (0 %) och om  $\Delta\varepsilon = 0$  är tvånget 100 %, dvs. alla rörelser kan ske respektive inga rörelser kan ske. Fullt utvecklat tvång (dvs.  $\gamma = 1,0$ ) i ett element av nygjuten betong innebär logiskt oeftergivliga anslutande strukturer eller undergrund. Faktorer som definierar tvånget kan för en given situation erhållas från t.ex. en FEM-analys där erhållna töjningar från en homogen temperaturändring jämförs med den fria temperaturrörelsen, se även avsnitt 3.2.2.

Alternativt till töjningsbetraktelsen ovan kan vid en elastisk analys tvångsfaktorer analyseras genom att jämföra spänningsändringar i någon riktning,  $\Delta\sigma^x$ , med den elastiska spänningen  $\Delta\sigma_{\text{fix}}$  vid 100 % tvång,  $\Delta\sigma_{\text{fix}} = E\Delta\varepsilon^0$ . Då erhålls:

$$\gamma = \frac{\Delta\sigma^x}{\Delta\sigma_{\text{fix}}} \quad (4.2)$$

Det är också möjligt att uttrycka tvångsfaktorer som relationer mellan krafter t.ex.

$$\gamma = \frac{N^x}{N_{\text{max}}} \quad (4.3)$$

där  $N_{\text{max}}$  är den maximala kraftupbyggnaden av temperaturrörelse vid 100 % tvång och  $N^x$  är den aktuella kraften,  $N^x = EA\Delta\varepsilon^0$ .

#### 4.2.2 Grad av enaxiellt tvång

Om stödet har en styvhet  $S$  [N/m] som indikerat i Figur 4.1 kan det enaxiella tvånget uttryckas explicit (se definitioner enligt Figur 4.1) enligt exempelvis Betonghandbok - Material (1994)

$$\gamma_R = \frac{1}{1 + \frac{EA}{L} \frac{1}{S}} \quad (4.4)$$

Elasticitetsmodul  $E$  kan även omformuleras till så kallad komplians  $J(t, t')$  [1/Pa] eller en effektiv elasticitetsmodul  $E_{\text{eff}}(t, t')$  [Pa] där  $E_{\text{eff}}(t, t') = 1/J(t, t')$ . Då kan även betongens krypning beaktas:

Tvångsfall

$$\gamma_R = \frac{1}{1 + \frac{E_{eff}(t, t')A}{L} \frac{1}{S}} \quad \text{eller} \quad \gamma_R = \frac{1}{1 + \frac{A}{J(t, t')L} \frac{1}{S}} \quad (4.5)$$

$E_{eff}(t, t')$  och  $J(t, t')$  och är elasticitetsmodul respektive flexibilitet vid tiden  $t'$  för en betong pålastad vid tiden  $t$ . Alternativt kan fjäderflexibilitet  $F$  [m/N]) användas i ekv.(4.4) och (4.5) ovan med  $F = 1/S$ .

Det observeras att inte bara elasticiteten  $E_{eff}(t, t')$  hos det nygjutna elementet kan variera med tiden. Även styvheten hos anslutande struktur kan ändras t.ex. om denna också är relativt nygjuten dvs.  $S = S(t, t')$ .

#### 4.3 Rekommenderade värden

Fallet används vid endimensionella fall såsom i långsträckta etapper av väggar och plattor. Tunna väggar på grövre bottenplattor innebär nära nog fullständigt tvång, se dock Nilsson, M (2003b) där många fall av vägg på platta finns beräknade med elastiska fem-analyser.

Fall med eftergivligt mothåll vid ände, dvs. tvånget  $\gamma_R < 1$ , modelleras genom att ändstödet deformationer anses vara spänningsberoende enligt någon styvhetsrelation, se ex.vis typfall Pålgrundläggning i avsnitt 5.5.4 nedan.

*Hänvisningar och referenser:* Betonghandbok – Material (1994), avsnitt 16.10:2.2.

Emborg et. al (1997), Typfall I och kapitel 4.

#### 4.4 Exempel på tvångsanalys – två betongelement i samverkan

För få en djupare kunskap i generell tvångsmodellering kan följande exempel nyttjas. Vi studerar en betongkropp vars temperatur sjunker, dvs. under avsvlningsfasen efter hydratationen och som gjutits mot en äldre kropp, Figur 4.2. För enkelhets skull studeras endast volymändringen i en av kroppens riktningar. Tre fall av tvång beskrivs. Figur 4.2b) finns ingen koppling mellan kropparna och den temperaturändrande kroppen är helt fri att röra sig. I Figur 4.2c) finns det koppling mellan kropparna och den temperaturändrande kroppen är delvis förhindrad att röra sig. I Figur 4.2d) är kroppen helt förhindrad att rör sig.

Den helt fria kroppen i Figur 4.2b) minskar i längd sträckan  $\Delta L$  som motsvarar den så kallade frikroppsrörelsen  $\Delta L_{fri} = \alpha \Delta T$  (där  $\alpha$  = betongens längdutvidgningskoefficient). Den delvis fasthållna kroppen i Figur 4.2c) minskar inte lika mycket i längd som den helt fria i Figur 4.2b) utan "dras" ut en spänningsgivande sträcka proportionell mot tvånget,  $\Delta L_1 = \gamma_R \Delta L_{fri}$  (där  $\gamma_R$  = tvånget). Hur mycket kroppen tillåts att längdändra beror på hur mycket motstånd den angränsande kroppen gör. Den slutliga längdändringen

för den unga betongen fås som frikropps rörelsen  $\Delta L_{fri}$  minus den spänningsgivande sträckan  $\Delta L_1$ , varur tvånget kan lösas enligt

$$\Delta L = \Delta L_{fri} - \Delta L_1 = \Delta L_{fri} - \gamma_R \Delta L_{fri} \Rightarrow$$

$$\gamma_R = \frac{\Delta L_1}{\Delta L_{fri}} = 1 - \frac{\Delta L}{\Delta L_{fri}} \quad (4.6)$$

Samma resonemang som ovan kan göras med krafter och moment. Vid delvis fasthållning under avsvälning av kroppen i Figur 4.2c) uppstår en spänningsgivande dragkraft  $F_{RI}$  proportionell mot tvånget,  $F_{RI} = \gamma_R F_{fri}$ . Hur stor den spänningsgivande kraften blir beror på hur mycket motstånd den angränsande kroppen gör, dvs. storleken på den yttre kraften  $F_{RY}$ .

Normalt verkar inte dessa krafter i tvärsnittets tyngdpunkt utan med en viss excentricitet; böjande moment uppstår med ett inre moment  $M_{RI}$  och ett yttre motverkande  $M_{RY}$ . Uttryck för tvånget blir då på samma sätt som i ekv. (4.6)

$$\gamma_R = 1 - \frac{F_{RY}}{F_{RI}} \quad (4.7)$$

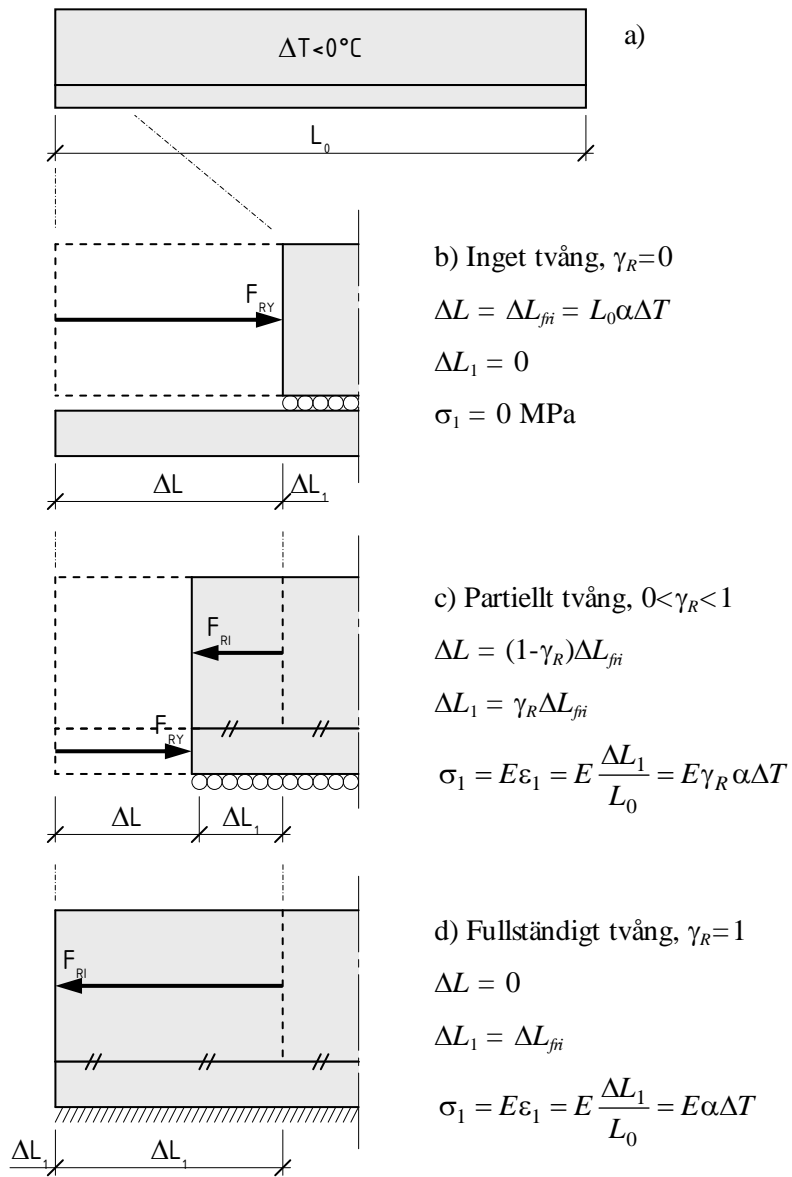
Och

$$\gamma_R = 1 - \frac{M_{RY}}{M_{RI}} \quad (4.8)$$

Ovanstående uttryck är alla användbara vid bestämning av tvång. Beroende på de analyser och uttryck man har till sin hjälp är det ibland lämpligt att bestämma tvånget genom att studera och jämföra deformationer i någon riktning enligt ekv. (4.6); andra gånger är det bättre och enklare att studera krafter eller moment enligt ekv. (4.7) respektive ekv. (4.8).



Tvångsfall



**Figur 4.2** Principiell beskrivning av tvång: b) inget tvång, c) partiellt tvång och c) fullständigt tvång.



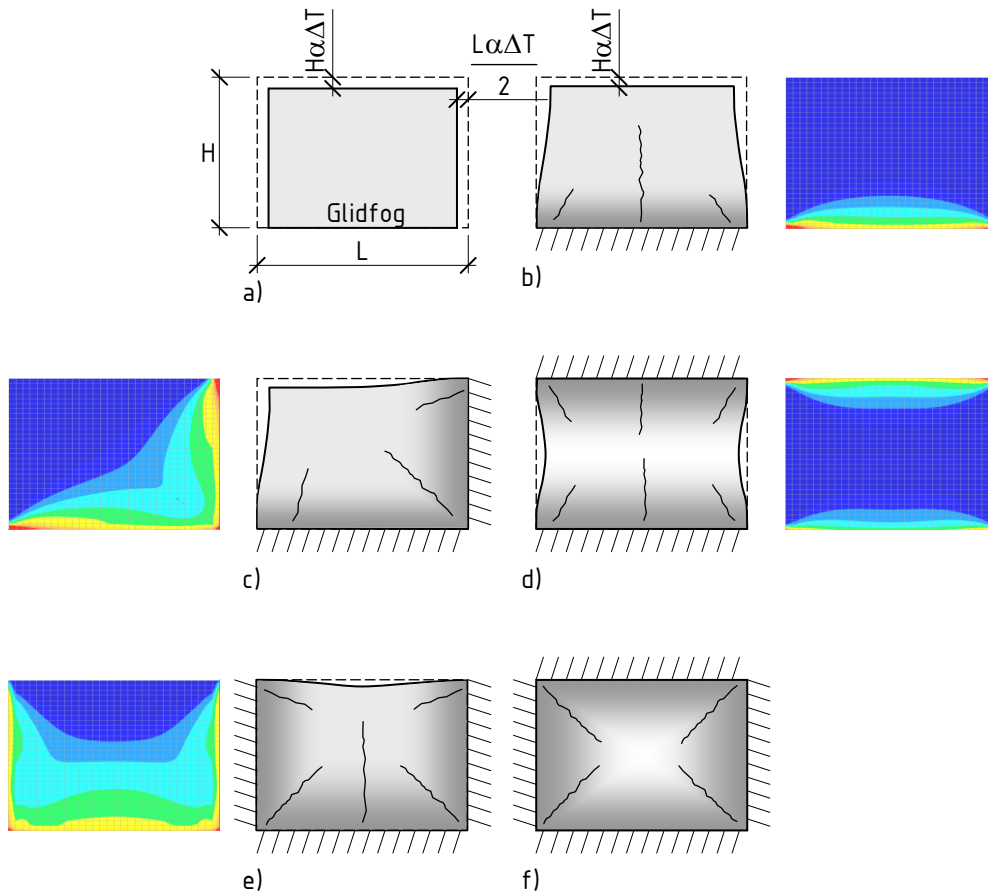
## 5 Tvångsfall

### 5.1 Inledning

Tvånget påverkas av geometri och antalet fria ytor hos det nygjutna elementet, eftergivlighet, längd och grundläggning hos anslutande konstruktioner. Geometrin inverkar via areaförhållandet mellan ung och gammal betong, den unga betongens höjd och utbredning från motgjutning samt konstruktionens gjutlängd. Randvillkor som underlagets styvhet och bäddmodul påverkar konstruktionens och motgjutningens rörelsemöjligheter. Möjligheten till glidning i gjutfogar och mot undergrund inverkar också på tvånget där gjutfogars egenskaper (råhet och mängd genomgående armering) har betydelse. En gjutfogsglidning reducerar tvångsspänningarna och följaktligen risken för sprickbildning.

Figur 5.1a) visar en väggskiva som har möjlighet att glida mot underlaget och därmed är fri att röra sig i enlighet med den temperaturändring som sker. Tvånget från omgivningen är i detta fall obefintligt och endast hänsyn till temperaturskillnader inom konstruktionen måste beaktas. I delfigur b) är väggskivan helt förhindrad att röra sig längs den nedre randen. Tvånget och därmed sprickrisken kan bli avsevärt med möjlig sprickbildning enligt figuren. Om en vägg sitter fast längs två mot varandra angränsande sidor, delfigur c) ändras tvångsfördelningen jämfört med delfigur b) med en ändrad sprickbildning. På liknande sätt ändras fördelningen av områden med högre tvång och även möjliga sprickmönster när olika sidor är förhindrade att röra sig, se delfigurer d)-f).

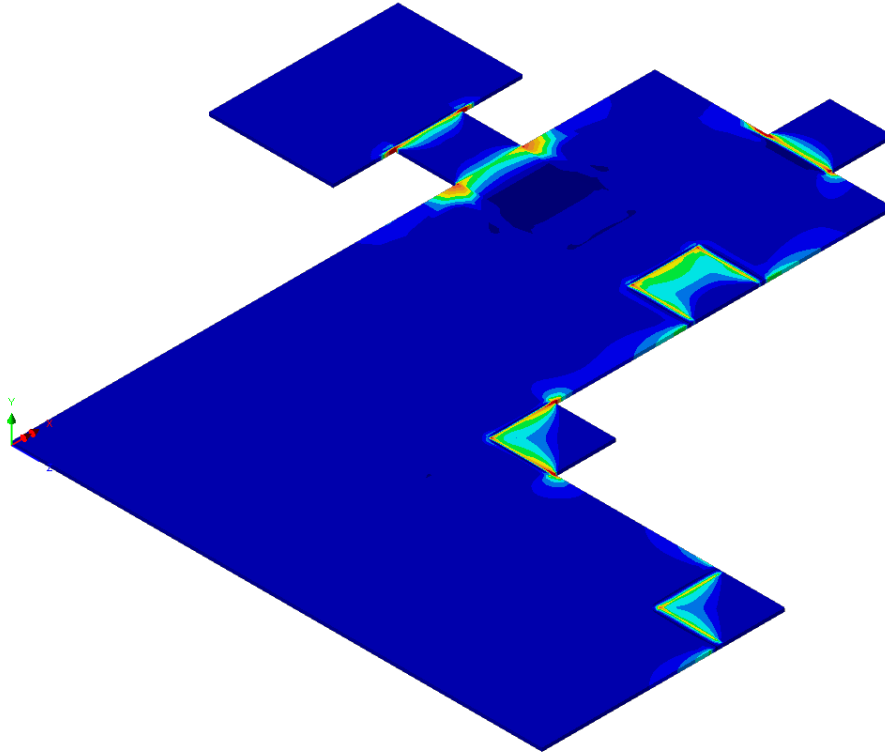
Tvånget bestäms även av relationen i mekaniska egenskaper mellan nygjutet element och angränsande konstruktioner/undergrund och av eventuella rörelser hos motgjutningen – t.ex. kan denna värmas upp av den nygjutna betongen.



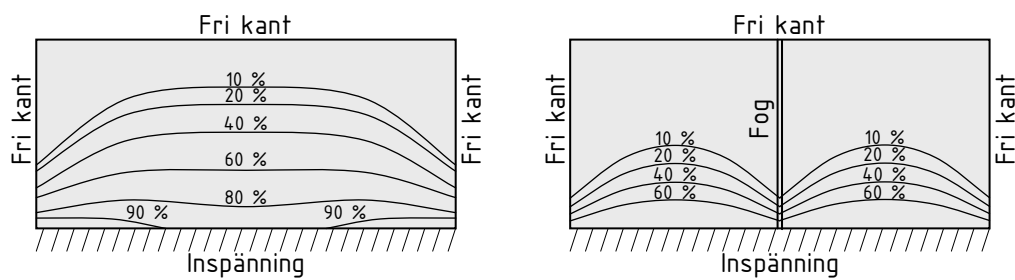
**Figur 5.1** Exempel på olika grader av tvång och rörelsemöjligheter. Modifiering från Bernander & Emborg (1994). Beräknat tvång (3D FEM) illustrerar tvångets fördelning över bottenplattan med hänsyn till randvillkor. Röd färg = 100 % tvång, Blå färg = 0 % tvång.

Arrangemang av gjutfogar, gjutordning och gjutfogars egenskaper (råhet och mängd genomgående armering inverkar på möjligheten till glidning) har avgörande inverkan på graden av tvång; och därmed möjlig reduktion av spänningar och följaktligen risken för sprickbildning, se Figur 5.3. Allmänt gäller att så många gjutetapper som möjligt ska få optimal rörelsemöjlighet under temperatursammandragningen. Vid gjutning av flera etapper bör ingen etapp angränsa mot redan gjutna etapper på två parallella sidor, se Figur 5.1 d)-f) där sprickrisken är störst.

Exempel på tvångets fördelning pga. antal motgjutna sidor enligt Figur 5.1 d)-f) kan se i Figur 5.2.



**Figur 5.2** Exempel på tvångsfördelning vid gjutetappindelning av bottenplatta utsatta för jämn temperatursänkning. Färgen illustrerar tvångets fördelning över bottenplattan med hänsyn till fastlåsningseffekt från intilliggande konstruktionsdelar. Röd färg = 100 % tvång, Blå färg = 0% tvång.



**Figur 5.3** Exempel på tvångsfördelning i väggar utsatta för jämn temperatursänkning. I a) är tre sidor fria och en sida fast inspänd och i b) gäller samma randvillkor men med en centrisk, vertikal gjutfog. Betonghandbok – Arbetsutförande (1994).

Vid de vertikala fria ändarna av en nygjuten sektion uppträder även tvång vinkelrät mot gjutfogen, vilket i fall med mycket styva undergrunder kan uppgå till 60 %. Detta innebär även höga tvångsspänningar snett gjutfogen, som exempelvis kan demonstreras i tvådimensionella finita elementanalyser av en vägg på en styv platta. Dessa spänningar avtar snabbt med avståndet från väggänden. Vidare pga. höga normal- och skjivspänningar i fogen vid ändarna sker viss mikrosprickbildning och glidning kring gjutfogen nära ändarna vilket reducerar tvånget. Detta förklarar även varför sprickor inte vanligtvis uppträder nära ändarna i en nygjuten sektion trots det faktum att finita elementberäkningarna indikerar störst huvudspänningar där.

Tvånget bestäms även av relationen i mekaniska egenskaper mellan nygjutet element och angränsande konstruktioner/undergrund och av eventuella rörelser hos motgjutningen – t.ex. kan denna värmas upp av den nygjutna betongen.

Beträffande elementen i Figur 5.1 kan två tvångstyper identifieras: enaxiellt tvång och kontinuerligt randtvång.

Enligt kapitel 4 innebär det enaxiella tvånget att tvångseffekter i andra vinkelräta riktningar helt försummas. Det är inte så vanligt men många fall kan approximativt förenklas till enaxiellt när den största huvudspänningen är markant större än den vinkelräta spänningen, t.ex. fall b) i Figur 5.1.

Kontinuerligt randtvång framkallat av anslutande strukturer eller undergrund till en nygjuten sektion är tillämpligt vid många faser av betongbyggande t.ex. gjutning av väggar, tak, plattor och fundament. Tvånget angriper ofta i basen av det nygjutna elementet och dess storlek, riktning och eventuellt tidsmässig förändring beror till hög grad på typen av anslutande struktur eller undergrund. Det är därför lämpligt att göra en lämplig indelning av det tvångsframkallande elementet, se avsnitt 5.2.

Enaxiellt tvång kan även vara applicerbart vid kontinuerligt randtvång i de fall när den största huvudspänningen är markant större än övriga spänningar. I mer komplexa spänningssituationer är det dock ibland nödvändigt med två- eller tredimensionella tvångsanalyser.

## 5.2 Tvångsfall

Enligt tidigare kan tvång delas in beroende på typ av tvångsframkallande struktur:

1. anslutande strukturer i elementets ändrar, dvs. enaxiellt ändtvång enligt tidigare,
2. oeftergivlig undergrund där motgjutningens typ och egenskaper är ovidkommande,
3. eftergivlig undergrund av jord och bergmaterial, dvs. friktionsmaterial. Här ingår specialfallen eftergivlig undergrund av jord eller stöd av pålar,
4. undergrund av berg,

## Tvångsfall

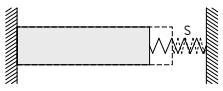
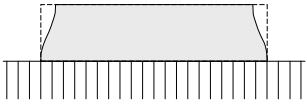
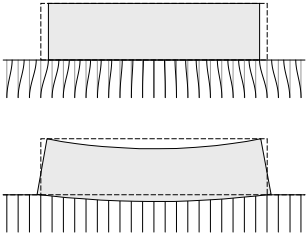
5. undergrund av anslutande betongkonstruktion modellerad med elastisk teori,
6. undergrund av anslutande konstruktion av annat material än betong eller berg,

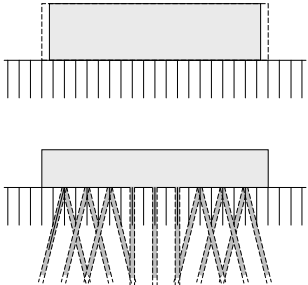

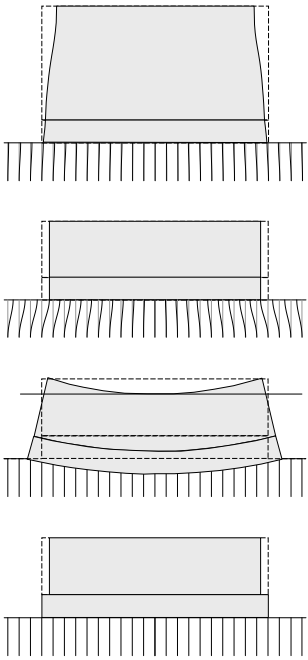

Fall 2-6 härrörs till kontinuerligt randtvång där fall 4-6 kan modellera många typsituationer, t.ex.

- a) konstruktion mot delvis eftergivligt berg, av t.ex. sprängning, vilket kan behandlas enligt elastisk teori
- b) vägg eller annan konstruktion gjuten mot tidigare gjuten platta
- c) tak gjutet på tidigare gjutna väggar
- d) vägg gjuten på vägg vid t.ex. byggande av höga pyloner
- e) pågjutningar på betong
- f) betong gjutet på stål i samverkanskonstruktioner

I följande avsnitt redovisas vanligt förekommande typiska tvångsfall, se Tabell 5.1, med situationsfigur, allmän beskrivning, förslag på analys, ev. rekommenderade metoder eller värden, samt ev. kommentarer och hänvisningar till andra avsnitt i denna rapport eller annan litteratur.

**Tabell 5.1** Vanligt förekommande typfall.

1. Enaxiellt ändtvång, se kapitel 4 och avsnitt 5.3	
2. Kontinuerligt oeftergivlig rand oavsett material, se avsnitt 5.4	
3. Kontinuerlig delvis eftergivlig rand, friktionsmaterial, se avsnitt 5.5  3.1 Translation (deformation i undergrunden), se underavsnitt 5.5.1  3.2 Rotation (deformation i undergrunden), se underavsnitt 5.5.2	

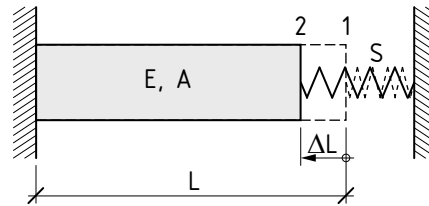
<p>3.3 Glidning på underlaget (utan deformation i undergrunden), se underavsnitt 5.5.3</p> <p>3.4 Pålgrundläggning, se underavsnitt 5.5.4</p>	
<p>4. Kontinuerlig delvis eftergivlig rand – berggrundläggning</p>	
<p>5. Randtvång betong mot betong</p> <p>5.1 Resiliens (i samverkande strukturer)</p> <p>5.2 Translation (i samverkande strukturer)</p> <p>5.3 Böjning/rotation (i samverkande strukturer)</p> <p>5.4 Glidning/uppsprickning i gjutfog</p>	
<p>6. Samverkansbroar</p>	

### 5.3 Enaxiellt ändtvång

*Beskrivning:* Tvång endast i en riktning, övriga riktningar försumbara.



## Tvångsfall



*Analys:* Enligt Betonghandbok - Material (1994). Om stödet har styvheten  $S$  [N/m] enligt figur kan tvånget uttryckas som

$$\gamma_R = \frac{1}{1 + \frac{EA}{L} \frac{1}{S}} \quad (5.1)$$

där  $E = E_{eff}(t)$  [N/m<sup>2</sup>] är den unga betongens effektiva elasticitetsmodul,  $A$  [m<sup>2</sup>] är det studerade elementets tvärsnittsarea,  $L$  [m] är dess längd och  $S$  [N/m] är mothållets styvhet.

Om styvheten hos mothållet går mot oändligheten,  $S \rightarrow \infty$ , kommer tvånget gå mot ett,  $\gamma_R \rightarrow 1$ ; medan om styvheten går mot noll,  $S \rightarrow 0$ , går även tvånget mot noll,  $\gamma_R \rightarrow 0$ . Alternativt används en flexibilitetskonstant  $F = 1/S$  [m/N] i ekv. (5.1).

Notera att inte bara den unga betongens elasticitetsmodul  $E_{eff}(t)$  kan variera med tiden, utan även mothållets styvhet, dvs.  $S = S(t)$  [N/m]. Om mothållet består av samma material som det studerade elementet kan det antas att även styvhetstillväxten är densamma – åtminstone under avsvalningsfasen. Följaktligen kan förhållandet mellan den effektiva elasticitetsmodulen och styvheten uttryckas i  $S_2 = E_{eff}(t)/S(t)$ . Ekv. (5.1) förenklas då till

$$\gamma_R = \frac{1}{1 + \frac{A}{L} S_2}$$

*Rekommenderade värden:* Beror på mothållets styvhet. Analyseras separat.

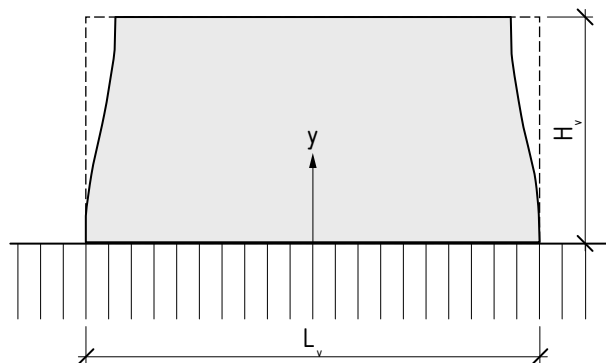
*Kommentarer:* Fallet används vid endimensionella fall såsom i långsträckta etapper av väggar och plattor. Tunna väggar på grövre bottenplattor innebär nära nog fullständigt tvång, se dock Nilsson, M (2003b) där många fall av vägg på platta finns beräknade med elastiska fem-analyser.

Fall med eftergivligt mothåll vid ände, dvs. tvånget  $\gamma_R < 1$ , modelleras genom att ändstödet deformationer anses vara spänningsberoende enligt någon styvhetsrelation, se typfall Pålgrundläggning i avsnitt 5.5.4 nedan.

*Hänvisningar och referenser:* Betonghandbok – Material (1994), avsnitt 16.10:2.2.; Emborg et. al (1997), Typfall I och kapitel 4.

#### 5.4 Kontinuerlig oeftergivlig rand oavsett material

*Beskrivning:* Konstruktion gjuten mot helt oeftergivlig undergrund/motgjutning utan någon möjlighet för konstruktionens botten att röra sig. Det innebär att undergrundens/motgjutningens egenskaper egentligen inte är intressanta. Oeftergivlig motgjutning är mycket sällsynt, men i vissa berggrundläggningar kan dock situationen uppträda. Fallet kan dock användas som en analys på "säker sida".



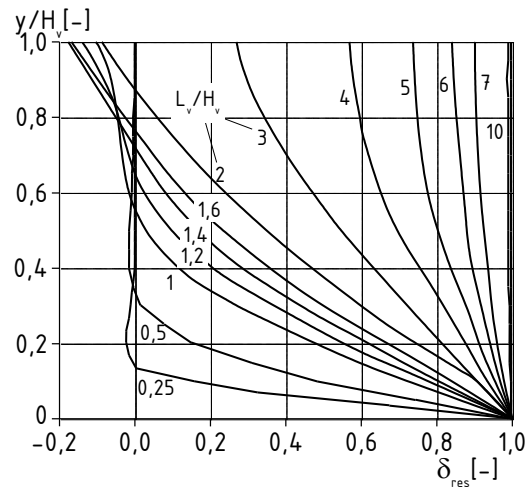
*Analys:* Två-dimensionella FEM-analyser.

*Rekommenderade värden:* Fullständigt translationsrandtvång respektive rotationsrandtvång råder ( $\gamma_{RT} = \gamma_{RR} = 1$ ) liksom att ingen glidning mot underlaget är möjlig ( $\delta_{glid} = 1$ ). Enligt ekv. (3.10) är tvånget därmed endast beroende av avståndet från gjutfogen. Det innebär att

$$\gamma_R = \delta_{res} \quad (5.2)$$

Diagram exempelvis enligt Emborg, M (1989) som utökats i Nilsson, M (2003a) anger värden på  $\delta_{res}$  beroende på konstruktionens längd-höjdförhållande och avståndet från gjutfogen, se Figur 5.4.

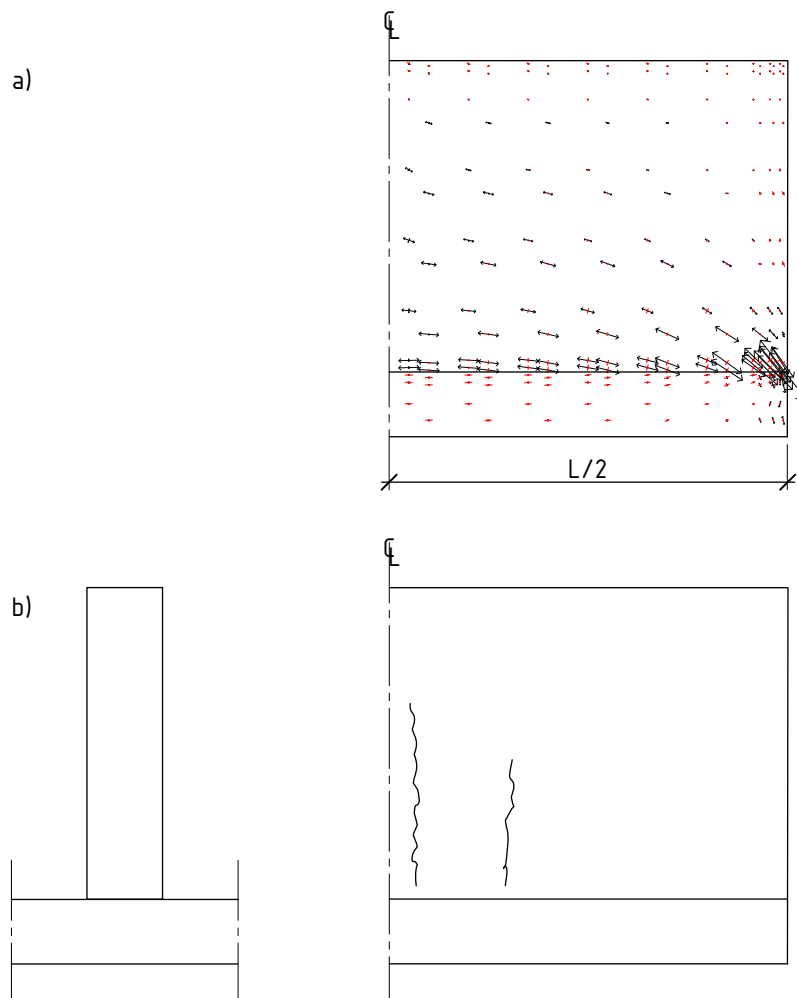
## Tvångsfall



**Figur 5.4** Värden på  $\delta_{res}$  beroende på konstruktionens längd-höjdförhållande och avstånd från gjutfogen, Emborg, M (1989) och Nilsson, M (2003a).

*Kommentarer:* Tvånget (spänningskvoten) enligt Figur 5.4 beräknas således för spänningar parallellt med fogen och i centrum av denna. Kurvorna i figuren härstammar från en av de första rapporterna om tvång i betongkonstruktioner där betongblock gjuts på berggrund, ACI (1973). De har ofta blivit justerade med hänsyn till nya erfarenheter och analyser och analyser t.ex. med FEM. Man ser tydligt inverkan av gjutlängd där en allt större del av väggen utsätts för högt tvång och därigenom sprickrisk. Även inverkan av avstånd till gjutfogen är tydlig liksom att faktiskt spänningar av motsatt tecken (tvånget mindre än noll) kan uppkomma i vissa fall.

I vertikala kanter av den gjutna sektionen uppstår också tvång i en riktning vinkelrätt till den tvångframkallade randen – ett tvång som vid en mycket styv undergrund kan uppgå till 60 %. Detta innebär höga tvångspänningar vinkelräta till gjutfogen vilket kan demonstreras i de 2-dimensionella FE analyserna i Figur 5.5. Dessa spänningar minskar snabbt med avståndet från kanten. Dessutom kan de stora spänningarna (dragspänningar och skjvspänningar) i kanten medföra att fogen sprickor upp och glidning uppstår vilket i sin tur minskar på spänningarna. Därför uppstår sällan dragsprickor i väggen i denna del.



**Figur 5.5** V ägg gjuten på en platta a) relativ storlek på huvudspänningar när väggen är utsatt för temperaturminskning under förutsättning att full vidhäftning i gjutfogen. b) Genomgående sprickor som de i verkligheten ofta uppträder i vägg.

*Hänvisningar och referenser:*

- ACI (1995): Chapter 4, Figure 4.1.
- Betonghandbok – Material (1994): Avsnitt 16.9.3.
- Nilsson, M (2003a): Paper A, Figure 4; och Paper B, Figure 6.

### 5.5 Kontinuerligt delvis eftergivlig rand mot friktionsmaterial

Situationen är gällande för fundament gjutna på jord och andra friktionsmaterial samt krossat berg där den gjutna sektionen kan glida i gränsytan eller på annat vis röra sig. Det är tydligt att rörelserna jämfört med friktionsmaterialet beror inte enbart på friktionskoefficienten utan även till en väsentlig del också på deformationsegenskaperna hos undergrunden. Låg styvhet hos undergrunden kan innebära att den totala betongrörelsen tas upp i friktionsmaterialet istället för deformationer i gränsytan, dvs. glidning behöver inte alltid ske.

Notera att även om eftergivligheten i undergrunden vid respons från skjuvkrafter och vertikala krafter från en deformerande betong har en effekt på tvånget, är detta ofta försummat i många verkliga fall av tvångsmodellering.

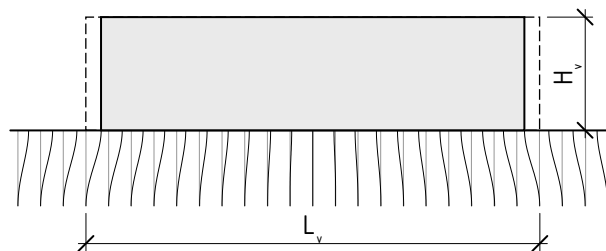
Olika modeller beskrivande tvånget för det aktuella fallet kan finnas i litteraturen, se t.ex. en översikt gjord av Rostasy et al. (2001). Vid jämförelser mellan och användning av modellerna är det viktigt att alla förutsättningar och antaganden klargörs.

Vid studier av tvångsfall kan följande indelning göras:

- Axiellt tvång framkallat av ytfriktion och motstånd till deformation i undergrunden. Normalkrafter och skjuvkrafter uppstår i undergrunden.
- Böjtvång uppkommet av motstånd till vertikala deformationer i undergrunden. Glidning och upplyft av delar av betongplattan kan förekomma.
- Böjtvång och axiellt tvång för strukturer grundlagda genom pålning.

#### 5.5.1 Translation

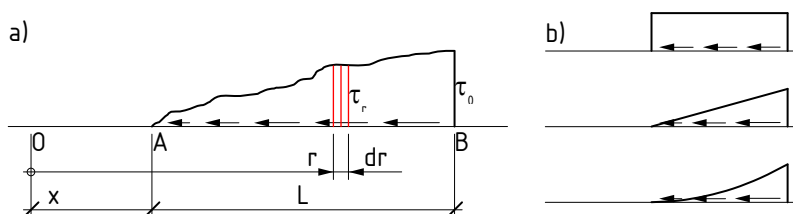
*Beskrivning:* Konstruktion gjuten mot undergrund av homogent material med viss utsträckning under och utanför betongkonstruktionen och som är eftergivlig med avseende på translation. Fallet uppträder t.ex. vid grundläggning på packad stenfyllning och friktionsmaterial där gjutetappslängden är mycket lång. Ingen eller begränsad glidning sker mellan konstruktionen och undergrunden.



*Analys:* Horisontella deformationer modelleras som elastisk halvrymd, se Bilaga A. Vid exempelvis vägg på vägg är det lämpligt att använda elastisk halvrymd.

*Rekommenderade värden:* I de flesta fall är translationsrandtvånget försumbart, dvs.  $\gamma_{RT} = 0$ . Men i vissa fall som t.ex. platta mot berg av hög kvalitet (utan sprickor och ej sprängt) kan elastisk halvrymd vara lämpligt att använda. I sådana fall sätts ekv. (A.54) eller ekv. (A.55) in i ekv. (4.6) och graden av tvång bestäms.

*Kommentarer:* För att bestämma tvång i olika tillämpningar för detta fall har Bernander (2001) härlett ekvationer för deformationer framkallade av horisontell punktlast i en tvådimensionell elastisk halvrymd. Genom integration kan ekvationer tas fram för deformationer av en godtycklig horisontell last, se Figur 5.6a), Bilaga A och Figur A.5.



**Figur 5.6** a) Beräkning av horisontell deformation på ytan av en elastisk halvrymd för en godtycklig skjuvlast på ytan. Punkten O, för vilken deformationen söks, är definierad genom parametern  $x$  räknad från en av ändpunkterna av lasten. Punktlastens ( $dP = \pi \cdot dr$ ) läge definieras genom  $r$ . b) olika lastvariationer.

Den horisontella deformationen vid O av en punktlast  $dP$  vid avståndet  $r$  från O definieras som:

$$du = \frac{2}{\pi E} dP \ln \frac{d}{r} = \frac{2\tau_r}{\pi E} dr \ln \frac{d}{r} \quad (5.3)$$

där  $d$  är ett avstånd långt från det belastade området. Om detta överskrids kan deformationerna betraktas som försumbara. Deformationen för en sammansatt integral last kan uttryckas som

$$u = \frac{2\tau_r}{\pi E} \int_x^1 \ln \frac{d}{r} dr \quad (5.4)$$

På detta sätt har teoretiska uttryck etablerats för, Figur 5.6b):

- konstant horisontell last
- linjärt varierande horisontell last
- last med parabolisk variation

Genom ett "trial and error"-förfarande av maximal deformation av betongstrukturen och motsvarande rörelser i ytan av den elastiska halvrymden, kan en god utvär-

## Tvångsfall

dering ske av temperaturskillnader och plattlängder för vilka deformationer sker i friktionsmaterialet. Dessutom kan storleken bestämmas på temperatursänkning för en speciell plattlängd där en spricka uppstår. Fördelen med denna ansats är att effekter av både skjuvdeformationer och horisontella deformationer i undergrunden tas med i analysen.

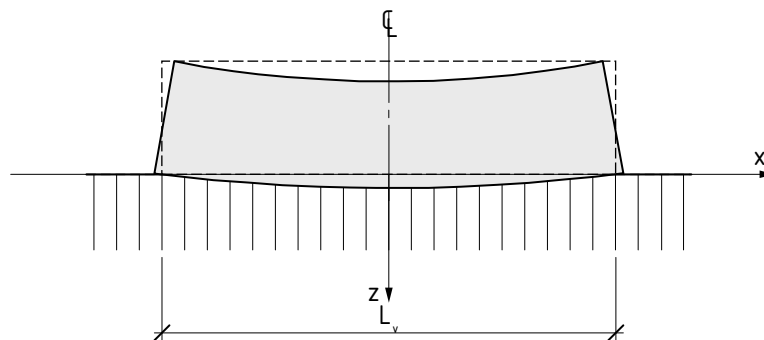
Tillämpning av dessa analyser på en 1 m tjock platta på en friktionsjord med  $E_{\text{mark}} = 100 \text{ MN/m}^2$  under antagande om en temperatursänkning på  $20^\circ\text{C}$  i betongen ger en total plattlängd av 300 till 400 m innan tvångsspänningarna når upp till draghållfastheten i betong. Vidare ger analyserna för en 40 m lång platta dragspänningar uppgående till endast 1/10 av draghållfastheten.

Från ovan kan ett ingenjörsmässigt övervägande göras att för gjutetapper som inte överstiger 40 m kan spänningar av tvång normalt försummas i jämförelse med spänningar från böjning etc., enligt avsnitt 5.5.2.

*Hänvisningar och referenser:* Bernander (2001) och Bilaga A.

### 5.5.2 Böjning/rotation

*Beskrivning:* Undergrunden av homogent material med viss utsträckning under och utanför betongkonstruktionen. Konstruktionen lyfter inte från underlaget.



*Analys:* Balk på elastiskt underlag, se Nilsson, M (2000).

*Rekommenderade värden:* Bestämning av randrotationstvånget kan göras med Figur 5.7 med hjälp av den så kallade elastiska längden, se ekv. (5.5), vilken beror på undergrundens och betongens mekaniska egenskaper och geometri. Oftast är randrotationstvånget försumbart, dvs.  $\gamma_{RR,y}(x) = 0$ ; endast vid långa längder kan högre värden förekomma beroende på kvoten mellan längden och den elastiska längden.

Den elastiska längden  $L_e$  bestäms enligt ekv. (5.5) där  $\kappa$  är en formfaktor, Tabell 5.2, och  $K_j$  är underlagets kompressionsmodul, Tabell 5.3. Alternativt bestäms elastiska

längden med  $B$  som är plattans bredd mot underlaget och  $c$  som är markens bäddmodul, Handboken Bygg K (1985) avsnitt K08:41, bestämd enligt ekv. (5.6)

$$L_e = \sqrt[4]{\frac{\kappa}{K_j} 2EI} = \sqrt[4]{\frac{2}{Bc} 2EI} \quad (5.5)$$

$$c \approx 1,3 \frac{E_g}{h_{pl}} \left( \frac{E_g}{E_{pl}} \right)^{1/3} \quad (5.6)$$

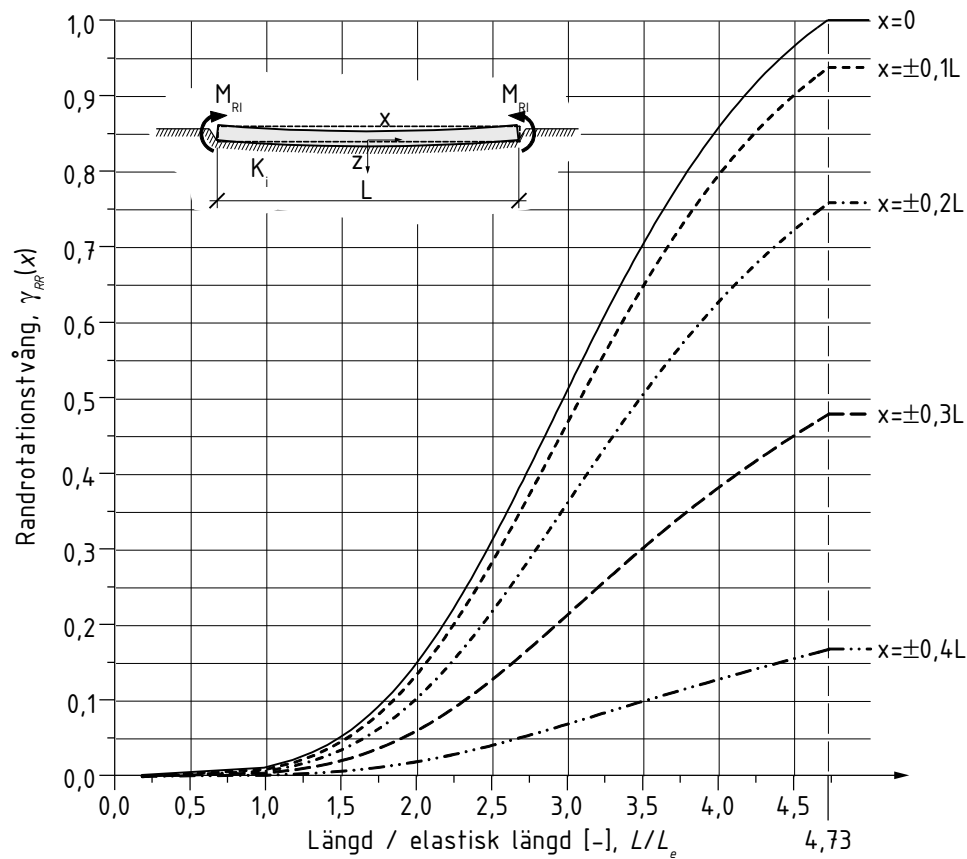
$E_g$  [N/m<sup>2</sup>] är grundmaterialets elasticitetsmodul,  $h_{pl}$  [m] är plattans tjocklek och  $E_{pl}$  [N/m<sup>2</sup>] dess elasticitetsmodul.

**Tabell 5.2** Formfaktorn  $\kappa$  som funktion av bredd-längd-förhållandet hos konstruktionen, Löfling, P (1993).

$B/L$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\kappa$	0,94	0,83	0,75	0,69	0,65



Tvångsfall



**Figur 5.7** Randrotationstvänet  $\gamma_{RR}(x)$  som funktion av kvoten mellan konstruktionens längd och den elastiska längden samt avståndet från centrum, Nilsson, M (2000).

**Tabell 5.3** Kompressionsmodul  $K_j$  för olika grundmaterial, från Bernander, S (1993).

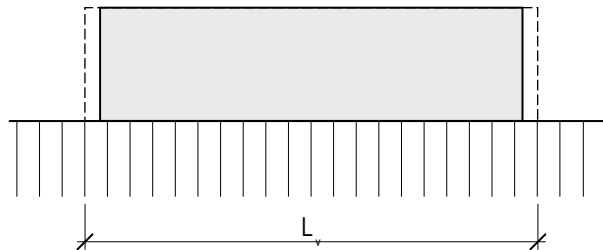
Typ av mark och grad av packning	$K_j$ [N/m <sup>2</sup> ]
Lera, mjuk	$0,5 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^6$
Lera, halfast	$1 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^6$
Lera, sandig och siltig	$2 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^6$
Sand, mjuk	$3 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^6$
Sand, mediumfast till fast	$10 \cdot 10^6 - 60 \cdot 10^6$
Grus, mediumfast till fast	$10 \cdot 10^6 - 60 \cdot 10^6$

*Kommentarer:*

*Hänvisningar och referenser:* Nilsson (2000): avsnitt 3.2.

### 5.5.3 Glidning på underlaget

*Beskrivning:* Undergrunden av homogent material med viss utsträckning under och utanför betongkonstruktionen. Typisk situation är grundläggning mot friktionsmaterial t.ex. makadam och annat bärlager.



*Analys:* Analys sker i princip på samma sätt som beskrivs i avsnitt 5.5.1.

*Rekommenderade värden:* -

*Kommentarer:* Fallet är närbesläktat med translation på delvis eftergivligt underlag och kan därför vara svårt att hålla isär, se avsnitt 5.5.1.

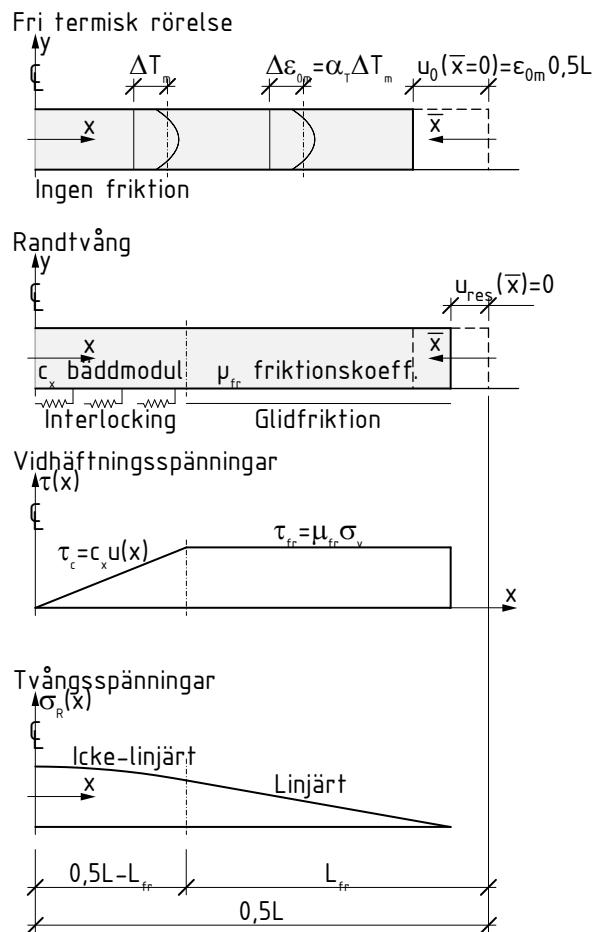
Även om axiellt tvång pga. friktion blir kritiskt för extremt långa gjutna sektioner, beskrivs den teoretiska bakgrunden mer detaljerat nedan.

Figur 5.8 representerar ändsektionen av en platta utsatt för kylning. För fallet att ingen friktion uppträder hindras inte ihopdragningen och inga spänningar uppträder (övre figuren). Friktionsspänningar uppträder dock under glidningen vars storlek kan uttryckas som

$$\tau_{fr} = \mu_{fr} \sigma_v = \mu_{fr} \rho_c d \quad (5.7)$$

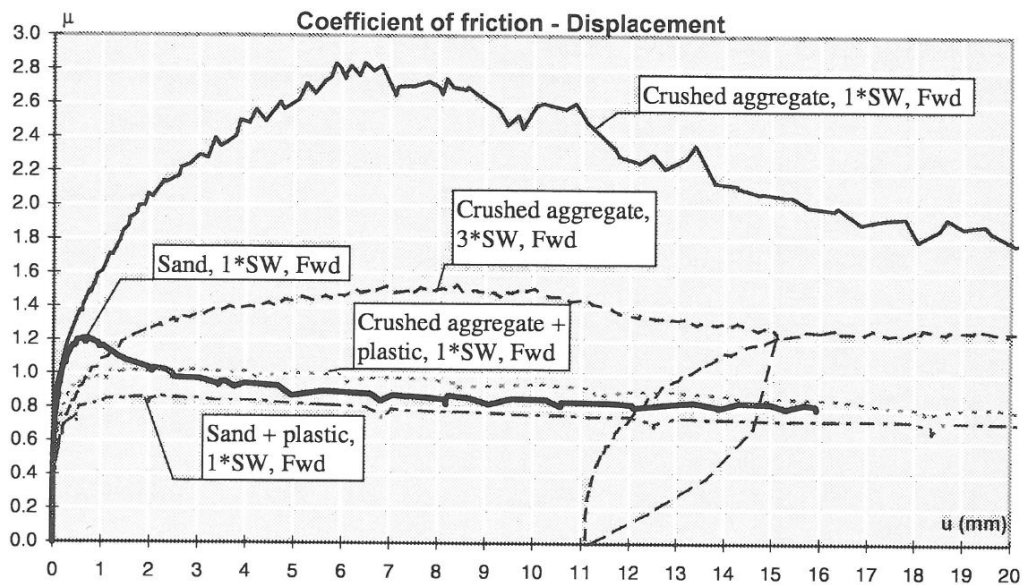
där  $\mu_{fr}$  är friktionskoefficienten vid glidning och  $\sigma_v$  är den vertikala spänningen i undergrunden från egenvikten av plattan. I mittsektionen av långa plattor är glidningen  $u$  mycket liten innebärande att den fria glidningen inte kan ske fullt ut som visas i figuren. Det är tydligt att en mer noggrann modellering av friktionskrafter innebär hänsynstagande av eftergivligheten av undergrunden.

## Tvångsfall



**Figur 5.8** Tvång pga. friktion mot underground. Fri termisk rörelse, tvång i platta, vidhäftningsspänningar och tvångsspänningar i betongen visas schematiskt, Rostásy et al (1998).

Olika forskare har studerat friktionskrafter mellan betong och sand eller andra friktionsmaterial. T.ex. har Pettersson (1998) genomfört försök där plattor sköts på friktionsmaterial, se Figur 5.9.

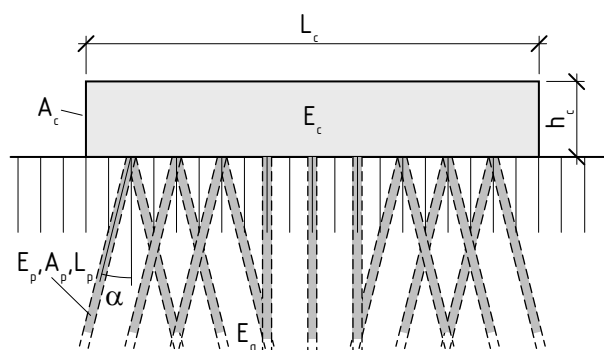


**Figur 5.9** Exempel på friktionskoefficienter erhållna från försök där plattor har skjutits på friktionsmaterial som har packats till olika täthet, Pettersson (1998).

Hänvisningar och referenser: Rostásy et al (1998) och Pettersson (1998).

#### 5.5.4 Pålgrundläggning

*Beskrivning:* Undergrund av ler- eller friktionsjord. Platta med tvärsnittsarea  $A_c$  (bredd  $B_c$  och höjd  $h_c$ ), elasticitetsmodul  $E_c$  och längd  $L_c$  på  $n$  antal pålar med viss längd  $L_p$ , tvärsnittsarea  $A_p$ , elasticitetsmodul  $E_p$  och lutning  $\alpha$  från lodlinjen.



*Analys:*

Horisontellt randtvång, se Bilaga C och ekv. (B.8):

Tvångsfall

$$\gamma_{RT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \frac{E_c A_c L_p}{E_p A_p L_c} \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad (5.8)$$

Vertikalt randtvång, se Nilsson, M (2000):

$$\gamma_{RR}(x=0) = 1 - \frac{2 \left( \cos \frac{L_c}{2L_e} \sinh \frac{L_c}{2L_e} + \sin \frac{L_c}{2L_e} \cosh \frac{L_c}{2L_e} \right)}{\sin \frac{L_c}{L_e} + \sinh \frac{L_c}{L_e}} \quad (5.9)$$

där  $L_e$  är plattans elastiska längd som bestäms enligt (jämför ekv. (5.5))

$$L_e = \sqrt[4]{\frac{4E_c J_c}{B_c c}} \quad (5.10)$$

$c$  är pålarnas bäddmodul, som approximativt kan bestämmas enligt Handboken Bygg K (1985) men modifierad med hänsyn till mängden pålar under plattan enligt

$$c \approx 1,3 \frac{A_p E_p}{A_c h_c} \left( \frac{A_p E_p}{A_c E_c} \right)^{1/3} \quad (5.10)$$

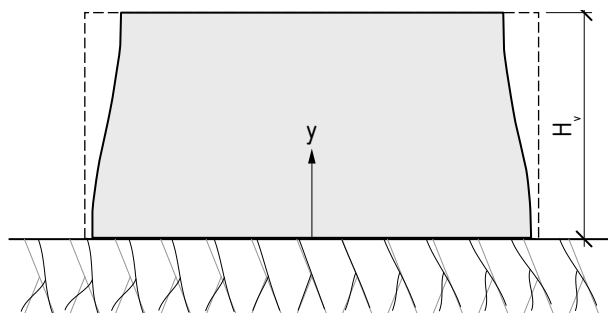
*Rekommenderade värden:* En enkel parameterstudie för bestämning av translations-tvånget kan göras. Med ansättande av pålar av betong C50/60 med  $E_p = 37000$  MPa, och varierande lutning (1:5, 1:4 och 1:3) och

*Kommentarer:* Normal pålgrundläggning (raka och lutande ca 5:1 – 4:1) har ofta en försumbar inverkan på mothållande effekt

*Hänvisningar och referenser:* Handboken Bygg K (1985), avsnitt K08:41, och Nilsson, M (2000), avsnitt 3.2.1.

## 5.6 Kontinuerligt delvis eftergivlig rand mot bergmaterial

*Beskrivning:* Grundläggning mot berg där berget uppvisar egenskaper beskrivna enligt elasticitetsteori. Hög konstruktion innebär att eftergivlighet med avstånd från gjutfog kan beskrivas med resiliensekvationer, se avsnitt 5.5.1.



*Analys:*

*Rekommenderade värden:* Vid gjutning direkt mot väl rensat berg kan dimensionerande tvångsfaktor uppgå till i storleksordningen 80% av fullt yttre tvång.

*Kommentarer:* Av erfarenhet förekommer det vanligtvis ett spricksystem i motgjuten berggrund, vilket kan medge erforderlig deformation och rörelse varvid fastlåsningsgraden minskar och tvånget sjunker.

En undergrund av fast berg skiljer sig naturligtvis kraftigt från en undergrund av jord. Medan styvheten och styrkan i jord ibland endast uppgår till bråkdelar av en procent av den för betong, kan elasticitetsmodulen och styrkan hos fast berg av vulkaniskt ursprung vara betydligt högre än för betong. Å andra sidan har inte kraftigt sprucket berg, mjuka sedimentära bergarter och skiffer förmåga att effektivt motstå de små förskjutningarna på grund av temperaturutvecklingen i betong.

Bestämningen av tvång i betong från en bergundergrund beror på de specifika förhållandena på platsen. Faktorer av stor betydelse i detta sammanhang är dimensionerna hos och hur massiv betongkonstruktionen som skall gutas är. Ett massivt, kort betongelement är mindre känsligt för det specifika motståndet från berget mot deformationen i betongen, än till exempel en lång normalstor vägg.

En undergrund av fast berg kan i allmänhet anses vara oändligt styv mot böjning. Men för att effektivt förhindra böjning av hårdnande betong (under avsvälningen) måste betongen-berggränssnittet, samt det eventuellt sprickiga berget därunder, kunna motstå de upplyftande rörelserna med avseende på drag. För massiv betong kan de upplyftande dragkrafterna vara stora. Mycket uppsprucket berg och berg benäget att spricka horisontellt (skiktas) är mest av intresse i detta sammanhang på grund av deras oförmåga att motstå upplyftande laster.

I många fall, undantaget långa tunna strukturer, ger endast omfattande vertikal förankring fullständigt böjtvång för berggrundläggning.

## Tvångsfall

En annan mycket viktig faktor i detta sammanhang är hur berggrunden har behandlats före gjutningen, när utgrävning till en föreskriven nivå gjordes. Borrhål för bergsprängningarna sträcker sig vanligtvis under den föreskrivna nivån och orsakar vertikal och horisontell dilatation och sprickbildning, vilket i sin tur innebär radikalt minskat motstånd mot horisontell deformation i kontraktion och upplyftning jämfört med ett ostört berg.

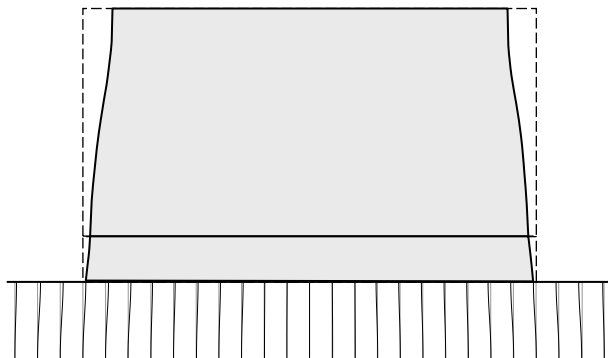
Mer tillförlitliga uppskattningar av tvång från berggrund kan göras med analyser av elastiska halvrymder i två eller tre dimensioner. Emellertid kan inte några generella riktlinjer ges. Uppskattningar med hänsyn till indata för analys med fem-metoder eller annat av tvång från berggrund måste bedömas från fall till fall. Ett antagande om osprucket berg förenklar naturligtvis problemet men är å andra sidan naturligtvis alldeles för konservativt.

*Hänvisningar och referenser:*

### 5.7 Randtvång vid betong mot betong

#### 5.7.1 Translation

*Beskrivning:* Relativt hög nygjuten vägg på äldre platta. Oeftergivligt underlag, jämför avsnitt 5.4. Pga. höjden avtar effekten av plattans tvång med avståndet från gjutfogen.



*Analys:* 2D eller 3D FEM-analyser.

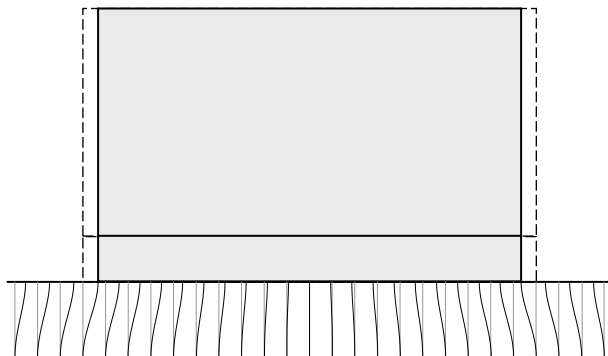
*Rekommenderade värden:* Dimensionerande tvång ca 40 -70%.

*Kommentarer:* Effekten från underlaget och bottenplattans dimensioner är starkt kopplat till motgjutningslängden varvid tvångets storlek och fördelning är dimensionsberoende.

*Hänvisningar och referenser:* Nilsson (2003).

### 5.7.2 Translation

*Beskrivning:* Nygjuten vägg på platta där elementen kan translatera mer eller mindre fritt på undergrund, jämför avsnitt 5.5.1.



*Analys:* 2d alternativt 3D FEM-analys

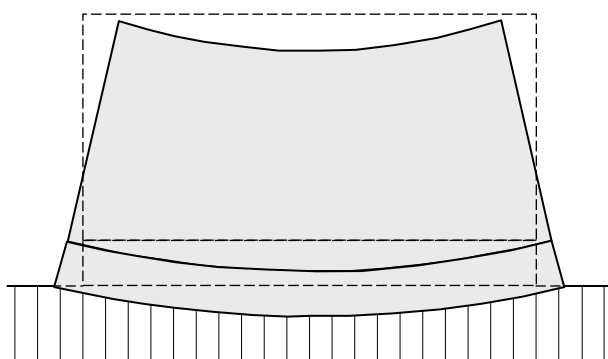
*Rekommenderade värden:* Dimensionerande tvång ca 60 -90%.

*Kommentarer:* Effekten från underlaget och bottenplattans dimensioner är starkt kopplat till motgjutningslängden och underlagets eftergivlighet varvid tvångets storlek och fördelning är dimensionsberoende.

*Hänvisningar och referenser:*

### 5.7.3 Böjning/rotation

*Beskrivning:* Nygjuten vägg på äldre platta. Böjning av hela systemet möjlig, jämför avsnitt 5.5.2.



*Analys:* Semi-analytisk metod enligt Nilsson, M (2003a), fem-analyser eller tabellvärden från ex.vis Nilsson, M (2003b).

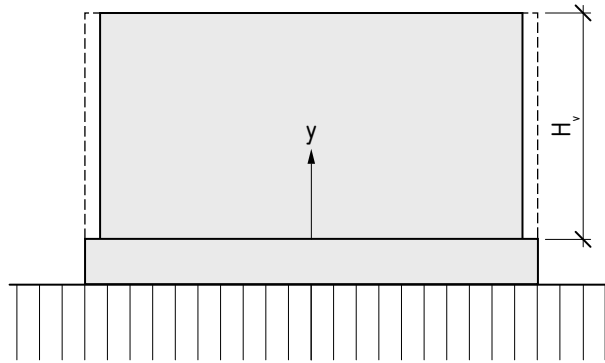
*Rekommenderade värden:*



Tvångsfall

*Kommentarer: Hänvisningar och referenser: Nilsson, M (2003a) och Nilsson, M (2003b).*

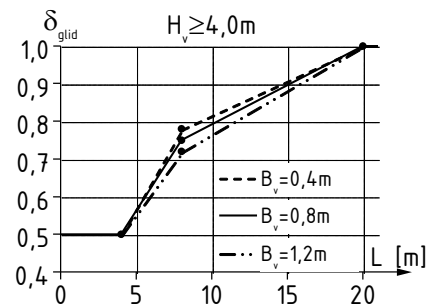
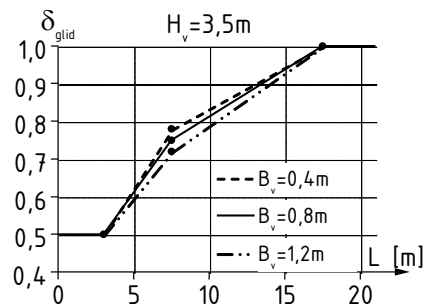
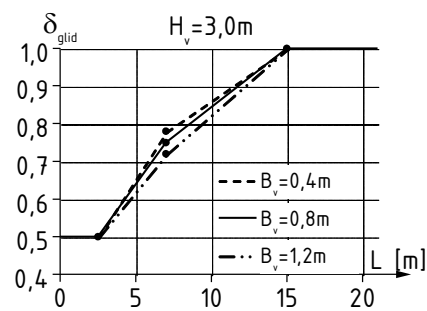
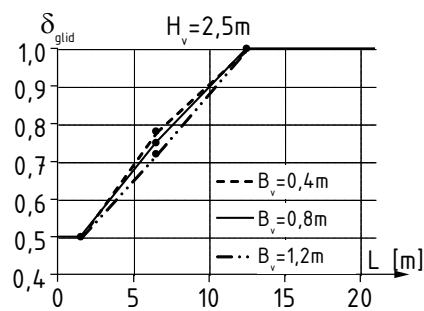
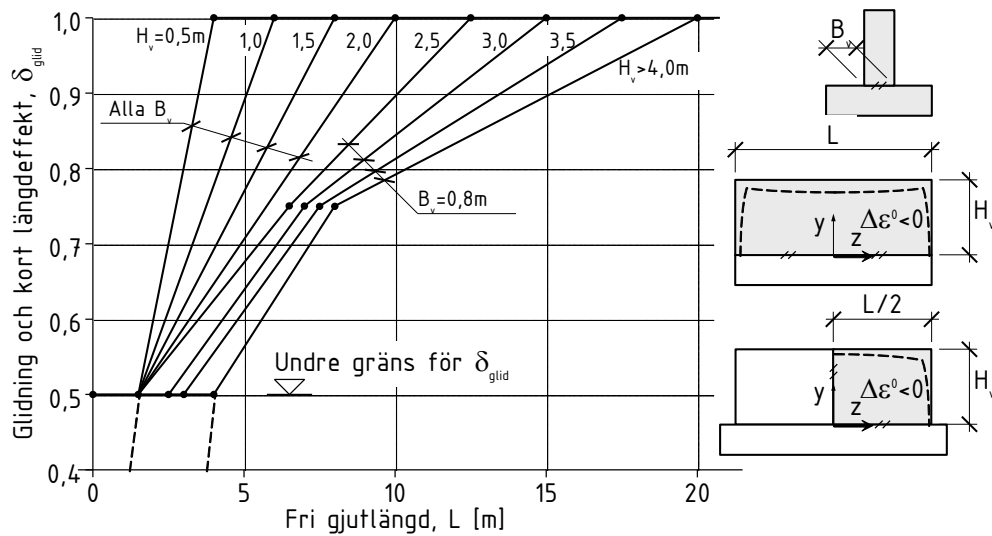
#### 5.7.4 Glidning/upsprickning i gjutfog



*Beskrivning:* Laboratorieförsök, se Nilsson, M (2000), liksom fältmätningar har påvisat att fenomenet glidning i gjutfogar existerar. Det visas att glidningen startar ute i ändarna av gjutfogarna och att de propagerar inåt mot centrum. Uppsprickningen sker stegvis från armeringsjärn till armeringsjärn (järnen som går tvärs gjutfogen från plattan upp i väggen). Möjlig glidning i gjutfog är till godo för konstruktionen vad gäller tvånget. Med glidning följer en minskning av tvånget och därmed även en minskning av sprickrisken. Åtgärder för vattenläckage måste dock vidtas, exempelvis med fogband och/eller injekterings slang.

*Analys:* I Bernander, S (2001) visas med hjälp av klassisk elasticitetsteori att för fallet vägg på platta med normala proportioner är uppkomsten av gjutfogsglidning både möjlig och trolig.

*Rekommenderade värden:* Än så länge finns inga teoretiska metoder för att ta med effekter av möjlig gjutfogsglidning, men baserat på laboratorieexperiment och fältobservationer har kurvor för bestämning av glidfaktorn  $\delta_{glid}$  föreslagits i Emborg et. al (1997) vilka modifierats i beräkningsprogrammet ConTeSt Pro (2003) (en undre gräns för tvångsreduktionen med hänsyn till glidning har antagits, dvs.  $\delta_{glid} \geq 0,5$ ).



**Figur 5.10** Faktor för effekt av möjlig glidning i gjutfog,  $\delta_{\text{glid}}$  som funktion av den fria gjutlängden, höjden och bredden på den nygjutna konstruktionsdelen. ConTeSt Pro (2003) och Nilsson, M (2000).

*Kommentarer:*

Tvång som överförs genom gjutfogar som utgör gräns till angränsande konstruktionsdelar kan alltid bestämmas genom att tillämpa elastiska analyser med FEM eller lik-

## Tvångsfall

nande på de angränsande elementen. Men även de mest sofistikerade beräkningsmetoderna kräver data om fogens karakteristika, speciellt förskjutningsegenskaper i gränsytan mellan ny och gammal betong.

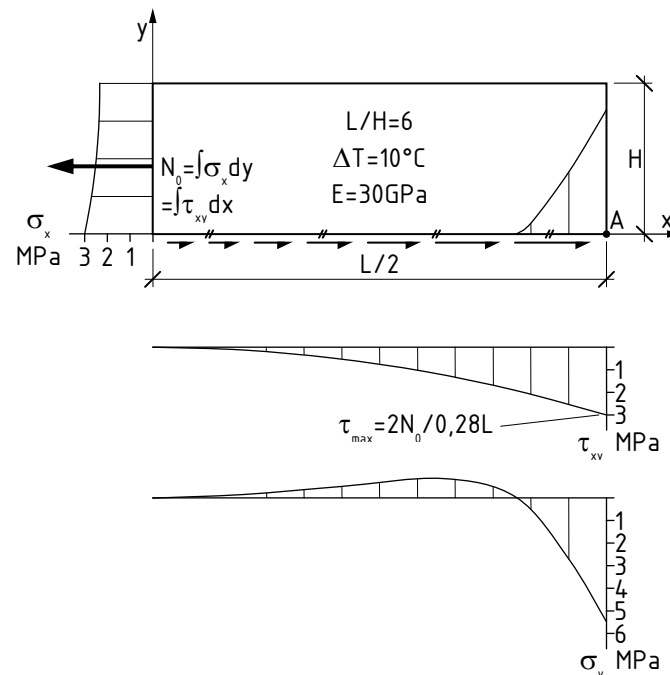
I avsnitt 5.1 diskuteras olika typer av tvång från angränsande strukturer. Följande stycken fokuserar på tvång av krafter som överförs genom konstruktionsfogar med behandling av deras natur och specifika egenskaper. För enkelhet skall studeras endast endimensionellt tvång parallellt med konstruktionsfogen.

I praktiken är tvångskrafterna i en gjuten betongsektion givna av skjuv- och normalspänningar som överförs genom konstruktionsfogar, något som kräver speciell hänsyn. Figur 5.11 visar storlekar och fördelning av huvudspänningarna i en vägg utsatt för en jämnt utbredd likformig temperaturminskning. Full vidhäftning antas mellan betongdelarna.

Nedan ges några praktiska aspekter liksom några få synpunkter fokuserande på konstruktionsfogar.

Som kan ses i Figur 5.5a är huvudspänningarna högst längst ner ut i hörnet av väggen närmast gjutfogen (punkt A). I praktiken tenderar dock sprickor att uppkomma i mitten av väggar enligt Figur 5.5b. Slutsatsen av detta är naturligt av denna skillnad mellan teori och verklighet att det inte kan vara full vidhäftning längs hela gjutfogen. Detta beror på att ett glidbrott – glidning – sker med start längst ut i änden av fogen (punkt A), se Nilsson (1998) och Nilsson(2000).

I Figur 5.11 ses resultat från en studie av beteendet hos konstruktionsfogar med avseende på deras tvångsverkan. Spänningar har beräknats under antagande om full vidhäftning i fogen. De viktiga skjuvspänningarna och de höga maximala dragspänningarna vinkelrät gjutfogen vid punkt A kommer emellertid i många fall att initiera progressiva skjuvbrott som indikeras i figuren. Bernander (1998).



**Figur 5.11** Resultat från studie av beteendet hos konstruktionsfogar med avseende på deras tvångseffekt. Spänningar beräknande under antagand om fullt tvång i fogen. Skjuvspänningarna och dragspänningarna vinkelrät fogen vid punkt A leder progressivt skjuvbrott, Bernander (1998).

Den kombinerade effekten av skjuvspänningar och koncentrerade dragspänningar vinkelrät fogen innebär ett extremt komplicerat spänningsläge, kring punkt A i figuren. För fall med styva undergrunder ger det åtminstone ett lokalt skjuvbrott i fogen. En brottanalys vid detta läge ger att även om betongens kohesion inte antas vara påverkad av svagheten i fogen uppkommer ett lokalt brott som resulterar i glidning mellan den unga och gamla betongen. Även i en fog med genomgående armering är ett glidbrott troligt att propagera längs fogen som ett progressivt skjuvbrott, se Nilsson (2000), tills skjuvkrafterna i fogen balanseras av den totala normalkraften  $N_0$  i mittnittet enligt Figur 5.11. Glidningen ger en reduktion av tvånget genom fogen.

Den tillhörande glidningen innebär en reduktion av tvånget genom fogen. Det enda sätt i exemplet att undvika detta progressiva brott är att eliminera den spräckande kraften  $\sigma_v$  genom att tillföra tillräckligt mycket och koncentrerad tvärgående armering vid hörnet A.

Följaktligen kommer kraften i en gjutfog att bero på dess längd, mängden genomgående armering och friktionsegenskaperna i gjutfogsyterna.

### *Praktiska konsekvenser*

Det rådande allmänna antagandet om full vidhäftning i gjutfogar är i många fall bevisligen alldeles för konservativt – särskilt för kortare gjutfogar ( $L < 6$  m) och med otillräcklig genomgående armering. Ovanstående överväganden har långtgående praktiska konsekvenser på utformning, byggande och ekonomi i fråga om tidig genomgående sprickbildning.

För det första är det uppenbart att glidningen i gjutfogen mellan den nya och gamla betongen måste ha en avgörande effekt på tvånget som den unga betongen utsätts för. Till exempel, om längden  $L$  i det läge som visas i exemplet i Figur 5.11 är 10 meter, kommer den totala kontraktionen vid vardera änden av väggen, motsvarande de  $10^\circ\text{C}$ , endast att vara ungefär 0,5 mm. Detta innebär att även en liten glidning i fogen i ena änden, låt säga endast 0,25 mm, minskar tvånget med omkring 50 %.

För det andra är det en nödvändig förutsättning för bildandet av de centralt belägna sprickorna som visas i Figur 5.5b) att gjutfogen måste ha tillräcklig längd och/eller tillräckligt mycket genomgående armering för att mobilisera tillräckligt med skjuvning för att bygga upp dragkraften  $N_0$  som krävs för att provocera dragbrott i väggens mitt. Skjuvkrafterna som kan mobiliseras i fogen kommer således att bero på friktionen efter glidbrott, dymlingseffekten av armeringen och resulterande tryck vinkelrätt mot fogen. Trycket följer som en balansering av lyftkrafterna vid gjutfogsändan av armering, armeringsjärnets dymlingseffekt (mindre) och som ett resultat av fogens avvikelser från en rät linje.

Det beskrivna fenomenet med kumulativ uppbyggnad av spänningen i väggen ( $\sigma_x$ ) längs fogen involverar förhållandet mellan glidbrottet, genomgående armeringen, friktionen och fogens längd. I praktiken observeras genomgående sprickor i väggar när gjutfogslängderna överstiger 8 till 10 meter. Detta är en omständighet som kräver teoretisk förutsägelse (vid antagande om full vidhäftning), enligt vilken dragtöjning och sprickrisk borde vara i stort sett oberoende av storleks- och skaleffekter.

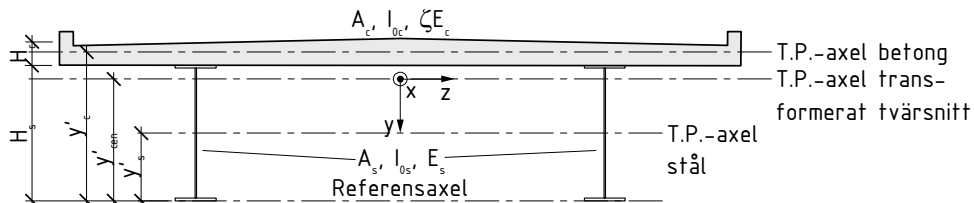
En tredje ganska udda företeelse är att dåligt rengjorda gjutfogar kommer att vara mindre benägna att resultera i genomgåendesprickor i nyligen gjutna sektioner än noggrant behandlade. Detta kan t.ex. vara en omständighet värd att överväga i samband med vattentäta strukturer, där gjutfogar i vilket fall som helst är utrustade med tätningband och/eller fogmassor.

*Hänvisningar och referenser:* Bernander (1998) och Nilsson (2000).

## 5.8 Övriga tvångssituationer

### 5.8.1 Samverkansbroar

*Beskrivning:* Pågjutning med betongplatta på stålbalkar



*Analys:* För symmetriska tvärsnitt enligt figur används semi-analytisk metod med randtvångskoefficienterna  $\gamma_{RT}$  och  $\gamma_{RR}$  lika med noll, se ekv. (5.11) och Bilaga C. I övriga fall krävs fem-analyser.

$$\gamma_R = 1 - \frac{1}{1 + \frac{E_s A_s}{\zeta E_c A_c}} - \frac{\frac{E_s A_s (y'_s - y'_c)}{\zeta E_c} y}{I_{0c} + \frac{E_s I_{0s}}{\zeta E_c} + \frac{E_s A_s (y'_s - y'_c)^2}{\zeta E_c \left(1 + \frac{E_s A_s}{\zeta E_c A_c}\right)}} \quad (5.11)$$

*Rekommenderade värden:* .

*Kommentarer:* I Hedman, J. (1997) analyseras ett antal olika situationer för samverkansbroar

*Hänvisningar och referenser:* Bilaga C nedan och Hedman, J. (1997).

## Referenser

KTH (1992). *Formelsamling i hållfasthetslära*. Stockholm: KTH, Institutionen för hållfasthetslära. Publikation nr 104, 9:e upplagan. 384 sid.

ACI (1973). Effect of Restraint, Volume Change, and Reinforcement on Cracking of Massive Concrete. ACI Committee 207. *ACI Journal / July 1973. Title No. 70-45*. pp. 445-470.

ACI (1990). Effect of Restraint, Volume Change, and Reinforcement on Cracking of Massive Concrete. ACI Committee 207. *ACI Materials Journal / May-June 1990. Title No. 87-M31*. pp. 271-295.

ACI (1995). Effect of Restraint, Volume Change, and Reinforcement on Cracking of Massive Concrete. ACI Committee 207. *ACI 207.2R-95*.

Bernander, S (1973). Cooling by Means of Embedded Cooling Pipes. Applications in Connection with the Construction of the Tingstad Tunnel, Göteborg. *Nordisk Betong, n:o 2-73*. pp. 21-31. (In Swedish).

Bernander, S (1982). Temperature Stresses in Early Age Concrete Due to Hydration. In: *Proceedings from International Conference on Concrete at Early Ages, RILEM, held in Paris, France on 6-8 April 1982*. Vol II. pp. 218-221.

Bernander, S (1993). *Balk på elastiskt underlag överkad av ändmoment  $M_1$*  (Beam on Resilient Ground Loaded by Bending End Moments  $M_1$ ). Göteborg, Sweden: ConGeo AB. Notes and calculations with diagrams. (In Swedish).

Bernander, S (1998). Practical Measures to Avoiding Early Age Thermal Cracking in Concrete Structures. In: *Prevention of Thermal Cracking in Concrete at Early Ages*. Ed. by Springenschmidt, R. London, UK: E & FN Spon. RILEM Report 15. pp. 255-314. ISBN 0-419-22310-X.

Bernander, S (2001). *Analysis of Deformations in an Elastic Halfspace due to Horizontal Loading*. Göteborg, Sweden: Con-Geo AB. Notes and calculations with diagrams. pp. 47.

Bernander, S & Emborg, M (1994). Temperaturförhållanden och sprickbegränsning i grova betongkonstruktioner I: *Betonghandbok – Arbetsutförande, projektering och byggande*. Solna,: AB Svensk Byggtjänst. sid. 639-666. ISBN: 91-7332-586-4.

*Betonghandbok – Arbetsutförande* (1994). Solna: AB Svensk Byggtjänst och Cementa AB. ISBN 91-7332-586-4

*Betonghandbok – Material* (1994). Solna: AB Svensk Byggtjänst och Cementa AB. ISBN 91-7332-709-3.

BRO 2004 (2004). *Bro 2004. Vägverkets allmänna tekniska beskrivning för nybyggande och förbättring av broar Bro 2004*. Borlänge: Vägverket, Publikation 2004:56.

Collins, M, P & Mitchell, D (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.: Prentice-Hall Inc. pp. 766. ISBN 0-13-691635-X.

ConTeSt Pro (2003). *Users manual - Program for Temperature and Stress Calculations in Concrete*. Developed by JEJMS Concrete AB in co-operation with Luleå University of Technology, Cementa AB and Peab AB. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology.

CraX1 (2003). *Temperatursprickor i betongkonstruktioner – Handbok med diagram för sprickriskbedömning inklusive åtgärder för några vanliga typfall*. Luleå: Luleå tekniska universitet, Teknisk rapport 2001:14, ISSN 1402-1536.

Emborg, M & Bernander, S (1994a). Assessment of the Risk of Thermal Cracking in Hardening Concrete. In: *Journal of Structural Engineering (ASCE), Vol 120, No 10, October 1994*. New York, U.S.A. pp. 2893-2912.

Emborg, M & Bernander, S (1994b). Thermal stresses computed by a method for manual calculation. In: *Proceedings of the International RILEM Symposium on Thermal Cracking in Concrete at Early Ages*. Munich, Germany, Oct. 10-12 1994. London, England: E & FN Spon. RILEM Proceedings 25. pp. 321-328. ISBN: 0 419 18710 3.

Emborg, M (1989). *Thermal Stresses in Concrete Structures at Early Ages*. Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Doctoral Thesis 1989:73D. pp. 285.

Emborg, M (2000). *Ung betong. I. Betonghandbok Högpresterande betong – Material och utförande*. Stockholm: AB Svensk Byggtjänst. sid. 75-105. ISBN 91-7332-928-2.

Emborg, M, Bernander, S, Ekefors, K, Groth, P & Hedlund, H (1997). *Temperatursprickor i betongkonstruktioner - Beräkningsmetoder för*



## Referenser

*hydratationsspänningar och diagram för några vanliga typfall* Luleå: Luleå tekniska universitet. Teknisk rapport 1997:02. 100 pp. ISSN 1402-1536.

Emborg, M, Bernander, S, Jonasson, J-E & Nilsson M (2003). *Avoidance of early age cracking - principles and recommendations*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS Report. pp. ISBN-91-89580-80-X. (In progress).

Handboken Bygg K (1985). *Handboken Bygg – Konstruktionsteknik*. Stockholm: LiberFörlag. ISBN 91-38-06078-7, 619 sid.

Hedlund, H (2000). *Hardening concrete measurments and evaluation of non-elastic deformation and associated restraint stresses*. Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Doctoral Thesis 2000:25. pp. 394. ISBN: 91-89580-00-1.

Hedman, J. (1997). Sprickrisanalys för samverkansbroar. Luleå: Luleå tekniska universitet, Avd. för konstruktionsteknik, Examensarbete 1997:136.

Heimdal, E, Kanstad, T & Kompen, R (2001a). *Maridal Culvert, Norway - Field test I*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:73-7. pp. 69. ISBN 91-89580-73-7.

Heimdal, E, Kanstad, T & Kompen, R (2001b). *Maridal Culvert, Norway - Field test II*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:74-5. pp. 20. ISBN 91-89580-74-5.

JCI (1992). *A Proposal of a Method of Calculating Crack Width due to Thermal Stress* (1992). Tokyo, Japan: Japan Concrete Institute, Committee on Thermal Stress of Massive Concrete Structures. JCI Committee Report. pp. 106.

Jonasson, J-E (1994). *Modelling of Temperature, Moisture and Stresses in Young Concrete*. Luleå: Tekniska högskolan i Luleå, Doctoral Thesis 1994:153 D, ISSN 0348-8373.

Jonasson, J-E, Emborg, M & Bernander, S (1994). Temperatur, mognadsutveckling och egenspänningar i ung betong. I: *Betonghandbok - Material*. Utgåva 2. Stockholm,: AB Svensk Byggtjänst och Cementa AB. sid. 547-607. ISBN 91-7332-709-3.

Jonasson, J-E, Wallin, K, Emborg, M, Gram, A, Saleh, I, Nilsson, M, Larson, M & Hedlund, H (2001). *Temperatursprickor i betongkonstruktioner – Handbok med diagram för sprickriskbedömning inclusive åtgärder för några vanliga typfall. Del D och E*. (Temperature cracks in concrete structures – Handbook with diagrams for crack risk judgement including measures for som typical cases. Part D and E). Luleå, Sweden:

Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology, Technical Report 2001:14. ISSN: 1402-1536, ISRN: LTU – TR – 01/14 – SE.

Kanstad, T, Bosnjak, D & Øverli, J A (2001). *3D Restraint Analyses of Typical Structures with Early Age Cracking Problems*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:32-X. ISBN 91-89580-32-X. pp. 27.

Larson, M (1999). *Evaluation of Restraint from Adjoining Structures*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:57-5. ISBN 91-89580-57-5. pp. 23.

Larson, M (2000). *Estimation of Crack Risk in Early Age Concrete*. Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Licentiate Thesis 2000:10. pp. 170.

Larson, M (2003). *Thermal Crack Estimation in Early Age Concrete – Models and Methods for Practical Application*. Doctoral Thesis 2003:20. pp. 190. ISBN: 91-86580-06-0.

Löfving, P (1993). *Bestämning av jords hållfasthets- och deformationsegenskaper*. Borlänge: Vägverket, Publication 1993:6, 30 sid.

Löfquist, B (1946). *Temperatureffekter i hårdnande betong* (Temperature Effects in Hardening Concrete). Stockholm, Sweden: Royal Hydro Power Administration. Technical Bulletins, Serie B, No 22. pp. 195. (In Swedish).

Nilsson, M (1998). *Inverkan av tvång i gjutfogar och i betongkonstruktioner på elastiskt underlag* (Influence of Restraint in Casting Joints and in Concrete Structures on Elastic Foundation). Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Division of Structural Engineering. Master Thesis 1998:090 CIV. pp. 61. (In Swedish).

Nilsson, M (2000). *Thermal Cracking of Young Concrete – Partial Coefficients, Restraint Effects and Influence of Casting Joints*. Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Licentiate Thesis 2000:27. pp. 267. <http://epubl.luth.se/1402-1757/2000/27/LTU-LIC-0027-SE.pdf>.

Nilsson, M (2003a). *Restraint Factors and Partial Coefficients for Crack Risk Analyses of Early Age Concrete Structures*. Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Doctoral Thesis 2003:19. pp. 170. ISBN: 91-86580-05-2.

Nilsson, M (2003b). *(Restraint Factors and Partial Coefficients for Crack Risk Analyses of Early Age Concrete Structures*. Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Technical Report 2003:11. pp. 199.

## Referenser

Nilsson, M, Jonasson, J-E, Wallin, K, Emborg, M, Bernander, S & Elfgrén, L (1999). Crack Prevention in Walls and Slabs - The Influence of Restraint. In: *Innovation in Concrete Structures, Design and Construction. Proceedings of the International Conference held at the University of Dundee, Scotland, UK on 8-10 September 1999*. Ed. by R. K. Dhir & M. R. Jones. London, UK: Thomas Telford Publishing. pp. 461-471. ISBN: 0 7277 2824 5.

Olofsson, J, Uhlán, M & Hedlund, H (2001a). *Slab cast on rock ground - Model for restraint estimation*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:66-4. ISBN 91-89580-66-4. pp. 34.

Olofsson, J, Uhlán, M & Hedlund, H (2001b). *2D and 3D Restraint Analyses, Typical Structure – Wall on Slab*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:64-8. ISBN 91-89580-64-8. pp. 81.

Pettersson, D (1998). *Stresses in Concrete Structures from Ground Restraint*. Lund, Sweden: Department of Structural Engineering, Lund Institute of Technology. Report TVBK-1014. pp. 112.

Rostásy, F, S, Gutsch, A-W & Krauß, M (2001). *Engineering models for the assessment of restraint of slabs by soil and in piles in the early age of concrete*. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering. IPACS-report BE96-3843/2001:59-1. ISBN 91-89580-59-1. pp. 135.

Rostásy, F S, Tanabe, T & Laube, M (1998). Assessment of External Restraint. In: *Prevention of Thermal Cracking in Concrete at Early Ages*. Ed. by R. Springenschmid. London, England: E & FN Spon. RILEM Report 15. State-of-the Art Report by RILEM Technical Committee 119, Avoidance of Thermal Cracking in Concrete at Early Ages. pp. 149-177. ISBN: 0 419 22310 X.

Stoffers, H (1978). Cracking due to Shrinkage and Temperature Variations in Walls. *Heron*, vol. 23, no. 23. pp. 5-68.

Wallin, K, Emborg, M & Jonasson, J-E (1997). *Värme ett alternativ till kyla* (Heat an alternative to cold). Luleå, Sweden: Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology. Technical Report 1997:15. pp. 168. (In Swedish).



## Bilaga A Balk på elastisk halvrymd

### A.1 Last på halvoändlig markyta

#### A.1.1 Linjelast mot halvrymd

Spänningstillståndet i en halvoändlig kropp orsakat av en linjelast kan bestämmas med hjälp av Airys spänningsfunktion uttryckt i polära koordinater. Lösningen till detta problem fanns först av Flamant 1892.

Studera Figur A.1. Ansätt en spänningsfunktion  $\phi$  anpassad till polära koordinater enligt

$$\phi = Cr\varphi \sin(\varphi + \theta) \quad (\text{A.1})$$

Den biharmoniska differentialekvationen i sin allmänna form ges av

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - \\ \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \varphi^4} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Derivering av ansatsen, dels med avseende på radien  $r$ , dels med avseende på vinkeln  $\varphi$  ger

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = C\varphi \sin(\varphi + \theta) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = Cr(\sin(\varphi + \theta) + \varphi \cos(\varphi + \theta)) \quad (\text{A.5})$$

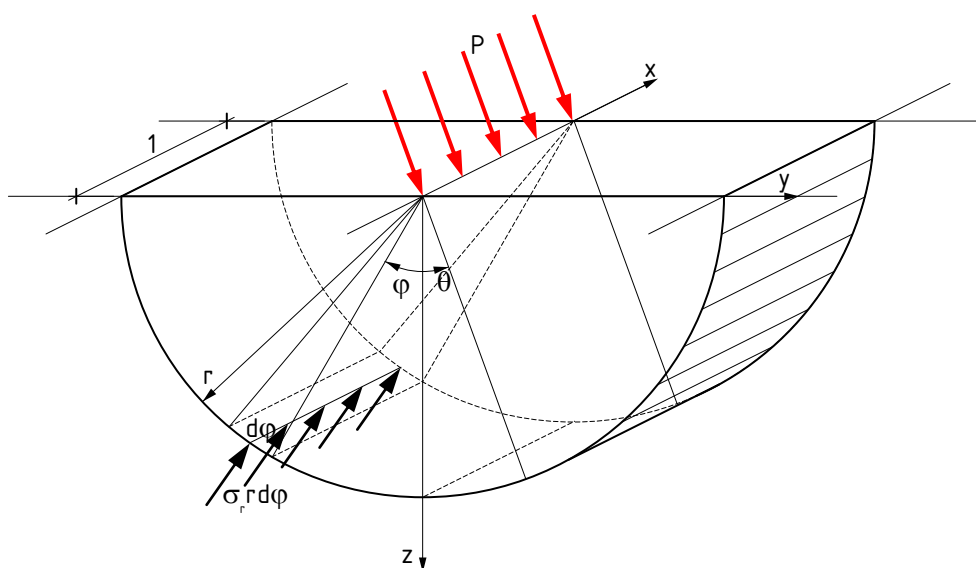
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = Cr(2 \cos(\varphi + \theta) - \varphi \sin(\varphi + \theta)) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial \varphi^3} = Cr(-3 \sin(\varphi + \theta) - \varphi \cos(\varphi + \theta)) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial \varphi^4} = Cr(-4 \cos(\varphi + \theta) + \varphi \sin(\varphi + \theta)) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} = C(\sin(\varphi + \theta) + \varphi \cos(\varphi + \theta)) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \varphi^2} = C(2 \cos(\varphi + \theta) - \varphi \sin(\varphi + \theta)) \quad (\text{A.10})$$



**Figur A.1** Vertikal linjelast mot halvrymd.

Ekv. (A.3)–(A.10) i ekv. (A.2) ger

Bilaga A

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^3} C \varphi \sin(\varphi + \theta) - \frac{2}{r^3} C (2 \cos(\varphi + \theta) - \varphi \sin(\varphi + \theta)) + \\
 & \frac{4}{r^4} C r (2 \cos(\varphi + \theta) - \varphi \sin(\varphi + \theta)) + \frac{1}{r^4} C r (-4 \cos(\varphi + \theta) + \varphi \sin(\varphi + \theta)) = 0 \\
 & \frac{1}{r^3} C \varphi \sin(\varphi + \theta) - \frac{4}{r^3} C \cos(\varphi + \theta) + \frac{2}{r^3} C \varphi \sin(\varphi + \theta) + \frac{8}{r^3} C \cos(\varphi + \theta) - \\
 & \frac{4}{r^3} C \varphi \sin(\varphi + \theta) - \frac{4}{r^3} C \cos(\varphi + \theta) + \frac{1}{r^3} C \varphi \sin(\varphi + \theta) \equiv 0
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Den biharmoniska differentialekvationen är uppfylld av ansatsen. Spänningarna fås till

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \\
 \frac{1}{r} C \varphi \sin(\varphi + \theta) + \frac{1}{r^2} C r (2 \cos(\varphi + \theta) - \varphi \sin(\varphi + \theta)) &= \frac{2C}{r} \cos(\varphi + \theta)
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

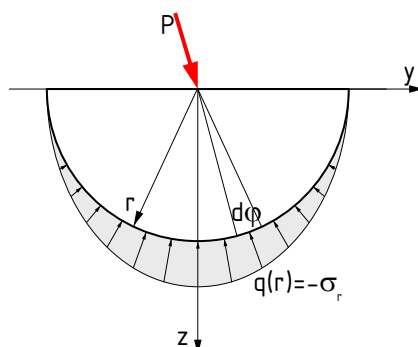
$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \tag{A.13}$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} C r (\sin(\varphi + \theta) + \varphi \cos(\varphi + \theta)) \right) = 0 \tag{A.14}$$

Konstanten  $C$  bestäms genom att uppfylla randvillkoren. För alla  $r \neq 0$  är spänningarna på halvrymdens begränsningsyta ( $z = 0$ ) lika med noll, dvs.

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = 0 & \varphi = \pm \frac{\pi}{2}; r \neq 0; y = 0 \\ \tau_{r\varphi} = 0 & \varphi = \pm \frac{\pi}{2}; r \neq 0; y = 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

Enligt ekv. (A.13) och (A.14) uppfylls alltid dessa randvillkor. I  $r = 0$  är randvillkoret lika med den påförda lasten  $P$ . Detta löses genom en jämviktsbetraktelse enligt Figur A.2. Resultanten till de krafter som verkar på den cylindriska ytan med radien  $r$  måste balansera lasten  $P$ .



**Figur A.2** Jämviktsbetraktelse av halvrymd med enhetstjockleken lika med ett och som belastas med en vertikal linjelast.

Antag att halvrymden har enhetstjocklek. Trycket mot halvrymden på avståndet  $r$  är lika med

$$q(r) = -\sigma_r \quad (\text{A.16})$$

Kraften på ett litet areaelement  $r d\varphi$  kommer då approximativt att vara

$$q(r) r d\varphi = -\sigma_r r d\varphi = -2C d\varphi \cos(\varphi + \theta) \quad (\text{A.17})$$

Summering av alla krafter i vertikalled ( $z$ -led) ger

$$P - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(r) r \cos(\varphi + \theta) d\varphi = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} P + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r r \cos(\varphi + \theta) d\varphi &= P + 2C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\varphi + \theta) d\varphi = \\ &= P + 2C \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2(\varphi + \theta)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ P + 2C \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\sin(\pi + 2\theta)}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi + 2\theta)}{4} \right] &= P + C\pi = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C = -\frac{P}{\pi} \quad (\text{A.19})$$

De radiella spänningarna fås slutligen som, ekv. (A.19) i ekv. (A.12)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos(\varphi + \theta) \quad (\text{A.20})$$



Bilaga A

Töjningarna fås som, KTH (1992),

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{E_g} = -\frac{2P}{\pi E_g r} \cos(\varphi + \theta) \quad (\text{A.21})$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = -\nu_g \frac{\sigma_r}{E_g} = \frac{\nu_g 2P}{\pi E_g r} \cos(\varphi + \theta) \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 0 \quad (\text{A.23})$$

där  $u_r$  och  $u_\varphi$  är förskjutningarna i radiell respektive tangentiell riktning och  $\nu_g$  och  $E_g$  är tvärkontraktionstalet respektive elasticitetsmodulen för grundmaterialet.

Integrering av ekv. (A.21) med avseende på  $r$

$$u_r = -\frac{2P}{\pi E_g} \cos(\varphi + \theta) \ln r + f(\varphi) \quad (\text{A.24})$$

och därefter derivering med avseende på  $\varphi$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \quad (\text{A.25})$$

Ekv. (A.24) insatt i ekv. (A.22) ger

$$\begin{aligned} -\frac{2P}{\pi E_g} \cos(\varphi + \theta) \ln r + f(\varphi) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{\nu_g 2P}{\pi E_g} \cos(\varphi + \theta) \Rightarrow \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{\nu_g 2P}{\pi E_g} \cos(\varphi + \theta) + \frac{2P}{\pi E_g} \cos(\varphi + \theta) \ln r - f(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Integrering med avseende på  $\varphi$  ger

$$u_\varphi = \frac{\nu_g 2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r - \int f(\varphi) d\varphi + F(r) \quad (\text{A.27})$$

som deriverat med avseende på  $r$  ger

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{\partial F(r)}{\partial r} \quad (\text{A.28})$$

Ekv. (A.25), (A.27) och (A.28) i ekv. (A.23) ger

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \left( \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{\partial F(r)}{\partial r} - \\
& \frac{1}{r} \left( \frac{v_g 2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r - \int f(\varphi) d\varphi + F(r) \right) = 0 \\
& \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{\partial F(r)}{\partial r} - \\
& \frac{1}{r} \frac{v_g 2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) - \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r + \frac{1}{r} \int f(\varphi) d\varphi - \frac{F(r)}{r} = 0 \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{\partial F(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{v_g 2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{1}{r} \int f(\varphi) d\varphi - \frac{F(r)}{r} = 0 \\
& (1 - v_g) \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \int f(\varphi) d\varphi + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = F(r) - \frac{\partial F(r)}{\partial r} r \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Ansätt nu

$$f(\varphi) = -(1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} \varphi \sin(\varphi + \theta) + C_1 \sin(\varphi + \theta) + C_2 \cos(\varphi + \theta) \tag{A.30}$$

Derivering

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} &= -(1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} (\sin(\varphi + \theta) + \varphi \cos(\varphi + \theta)) \\
&+ C_1 \cos(\varphi + \theta) - C_2 \sin(\varphi + \theta) \tag{A.31}
\end{aligned}$$

Integrering

$$\begin{aligned}
\int f(\varphi) d\varphi &= -(1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} \left( -\varphi \cos(\varphi + \theta) + \int \cos(\varphi + \theta) d\varphi \right) \\
&- C_1 \cos(\varphi + \theta) + C_2 \sin(\varphi + \theta) = \\
(1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} (\varphi \cos(\varphi + \theta) - \sin(\varphi + \theta)) &- C_1 \cos(\varphi + \theta) + C_2 \sin(\varphi + \theta) \tag{A.32}
\end{aligned}$$

Ekv. (A.31) och (A.32) insatta i vänsterledet av ekv. (A.29) ger

Bilaga A

$$\begin{aligned}
 & (1 - \nu_g) \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \\
 & (1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} (\varphi \cos(\varphi + \theta) - \sin(\varphi + \theta)) - C_1 \cos(\varphi + \theta) + C_2 \sin(\varphi + \theta) + \\
 & -(1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} (\sin(\varphi + \theta) + \varphi \cos(\varphi + \theta)) + C_1 \cos(\varphi + \theta) - C_2 \sin(\varphi + \theta) = \\
 & (1 - \nu_g) \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \\
 & (1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \varphi \cos(\varphi + \theta) - (1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) - C_1 \cos \varphi + C_2 \sin(\varphi + \theta) \\
 & -(1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \varphi \cos(\varphi + \theta) - (1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + C_1 \cos(\varphi + \theta) - C_2 \sin(\varphi + \theta) \equiv 0
 \end{aligned}$$

Att vänsterledet är lika med noll ger att även högerledet måste var lika med noll för alla värden på  $r$ , dvs.

$$F(r) - \frac{\partial F(r)}{\partial r} r = 0$$

Ansätt

$$F(r) = C_3 r + C_4$$

och derivera med avseende på  $r$

$$\frac{\partial F(r)}{\partial r} = C_3$$

som ger

$$C_3 r + C_4 - C_3 r = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

Nu är förskjutningarna i radiell och tangentiell riktning

$$\begin{aligned}
 u_r = & -\frac{2P}{\pi E_g} \cos(\varphi + \theta) \ln r - (1 - \nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \varphi \sin(\varphi + \theta) + \\
 & C_1 \sin(\varphi + \theta) + C_2 \cos(\varphi + \theta)
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Tvång

$$u_\varphi = \frac{v_g 2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + \frac{2P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) \ln r - (1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} \varphi \cos(\varphi + \theta) + (1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} \sin(\varphi + \theta) + C_1 \cos(\varphi + \theta) - C_2 \sin(\varphi + \theta) \quad (\text{A.34})$$

För en vertikal last  $P$  gäller att förskjutningen i horisontalld är noll, dvs.  $u_\varphi = 0$  för  $\varphi = 0$  och  $\theta = 0$  längs  $z$ -axeln (vertikallinjen) rakt under lasten vilket ger

$$u_\varphi = \frac{v_g 2P}{\pi E_g} \sin 0 + \frac{2P}{\pi E_g} \sin 0 \ln r - (1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} 0 \cos 0 + (1 - v_g) \frac{P}{\pi E_g} \sin 0 + C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{A.35})$$

Detta i sin tur ger i ekv. (A.33) för alla vinklar  $\varphi$  och  $\theta$

$$u_r = -\frac{2P}{\pi E_g} \ln r + C_2$$

Genom att införa att på avståndet  $r = d$  är förskjutningen i radiell riktning lika med noll ( $u_r = 0$ ) fås

$$-\frac{2P}{\pi E_g} \ln d + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{2P}{\pi E_g} \ln d \quad (\text{A.36})$$

Slutligen fås nu förskjutningarna till

$$u_r = \frac{2P}{\pi E_g} \left( \cos(\varphi + \theta) \ln \frac{d}{r} - \frac{(1 - v_g)}{2} \varphi \sin(\varphi + \theta) \right) \quad (\text{A.37})$$

$$u_\varphi = \frac{2P}{\pi E_g} \left( \sin(\varphi + \theta) \ln \frac{r}{d} + \frac{1 + v_g}{2} \sin(\varphi + \theta) - \frac{(1 - v_g)}{2} \varphi \cos(\varphi + \theta) \right) \quad (\text{A.38})$$

För vertikal last,  $\theta = 0$ , fås

Bilaga A

$$u_r = \frac{2P}{\pi E_g} \left( \cos \varphi \ln \frac{d}{r} - \frac{(1-\nu_g)}{2} \varphi \sin \varphi \right) \quad (\text{A.39})$$

$$u_\varphi = \frac{2P}{\pi E_g} \left( \sin \varphi \ln \frac{r}{d} + \frac{1+\nu_g}{2} \sin \varphi - \frac{(1-\nu_g)}{2} \varphi \cos \varphi \right) \quad (\text{A.40})$$

och för horisontell last,  $\theta = \pi/2$ , fås  $(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \varphi; \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos \varphi)$

$$u_r = \frac{2P}{\pi E_g} \left( -\sin \varphi \ln \frac{d}{r} - \frac{(1-\nu_g)}{2} \varphi \cos \varphi \right) \quad (\text{A.41})$$

$$u_\varphi = \frac{2P}{\pi E_g} \left( \cos \varphi \ln \frac{r}{d} + \frac{1+\nu_g}{2} \cos \varphi + \frac{(1-\nu_g)}{2} \varphi \sin \varphi \right) \quad (\text{A.42})$$

På markytan,  $\varphi = \pm\pi/2$ , fås för en vertikal last,  $\theta = 0$  i Figur A.1, de vertikala förskjutningarna till

$$\begin{aligned} u_\varphi \left( \frac{\pi}{2}; 0 \right) &= \frac{2P}{\pi E_g} \sin \frac{\pi}{2} \ln \frac{r}{d} + \nu_g \frac{2P}{\pi E_g} \sin \frac{\pi}{2} + (1-\nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \left( \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{2P}{\pi E_g} \ln \frac{r}{d} + \nu_g \frac{2P}{\pi E_g} + (1-\nu_g) \frac{P}{\pi E_g} = \\ &= \frac{P}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{r}{d} + (1+\nu_g) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

respektive

$$\begin{aligned} u_\varphi \left( -\frac{\pi}{2}; 0 \right) &= \frac{2P}{\pi E_g} \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \ln \frac{r}{d} + \nu_g \frac{2P}{\pi E_g} \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \\ &\quad (1-\nu_g) \frac{P}{\pi E_g} \left( \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= -\frac{2P}{\pi E_g} \ln \frac{r}{d} - \nu_g \frac{2P}{\pi E_g} - (1-\nu_g) \frac{P}{\pi E_g} = \end{aligned}$$

Tvång

$$= -\frac{P}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{r}{d} + (1 + \nu_g) \right) = -u_\varphi \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A.44})$$

vilket visar att symmetri gäller.

På samma sätt fås för en horisontell last,  $\theta = \pi/2$  i Figur A.1, de horisontella förskjutningarna på markytan,  $\varphi = \pi/2$  och  $\varphi = 3\pi/2$ , till

$$\begin{aligned} u_r \left( \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{2P}{\pi E_g} \left( -\sin \frac{\pi}{2} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1 - \nu_g)}{2} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -\frac{2P}{\pi E_g} \ln \frac{d}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

respektive

$$\begin{aligned} u_r \left( \frac{3\pi}{2} \right) &= \frac{2P}{\pi E_g} \left( -\sin \frac{3\pi}{2} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1 - \nu_g)}{2} \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= \frac{2P}{\pi E_g} \ln \frac{d}{r} = \frac{2P}{\pi E_g} \ln \frac{d}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

vilka också visar på att symmetri gäller.

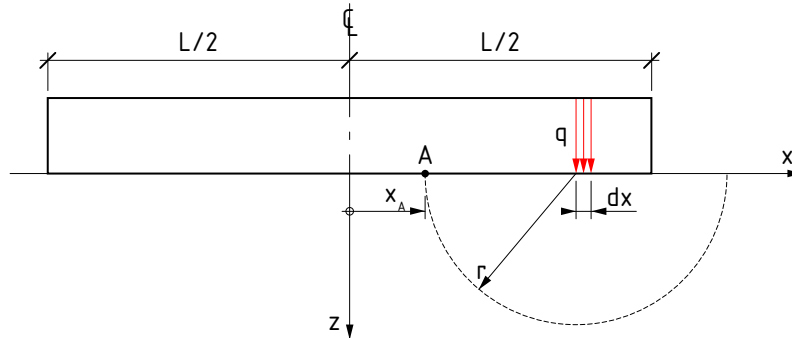
### A.1.2 Utbredd vertikal last mot halvrymd

Låt ändringen av den tangentiella förskjutningen  $du_\varphi$  definieras positivt nedåt (dvs. ej enligt strikt polärt koordinatsystem) för en infinitesimal last  $P = qdx$ . För hela markytan,  $\varphi = \pm\pi/2$ , gäller då att, jfr ekv. (A.43) och (A.44),

$$du_\varphi = \frac{q}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{d}{r} - (1 + \nu_g) \right) dx \quad \text{om } r > 0 \quad (\text{A.47})$$

Studera därefter plattan i Figur A.3 och effekten av last  $qdx$  i en punkt A belägen inom plattans anliggningsyta.

Bilaga A



**Figur A.3** Platta på mark – effekt i punkt inom lastområde.

Det gäller att

$$x_A = \alpha \frac{L}{2}$$

$$x_A + r = x \quad \text{eller} \quad x + r = x_A$$

$$r = x - x_A \quad \text{för} \quad x \geq x_A$$

$$r = x_A - x \quad \text{för} \quad x \leq x_A$$

Den vertikala (tangentiella) deformationen under plattan av lasten är

$$u_\varphi = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{q}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{d}{x - \alpha \frac{L}{2}} - (1 + \nu_g) \right) dx + \int_{\frac{\alpha L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{q}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{d}{\alpha \frac{L}{2} - x} - (1 + \nu_g) \right) dx =$$

$$= \left\{ \frac{2x}{L} = \xi; \quad dx = \frac{L}{2} d\xi; \quad \frac{d}{L} = \delta \right\} =$$

$$= \frac{qL}{2\pi E_g} \left( \int_{-1}^{\alpha} 2 \ln \frac{2\delta}{\alpha - \xi} d\xi + \int_{\alpha}^1 2 \ln \frac{2\delta}{\xi - \alpha} d\xi - \int_{-1}^1 (1 + \nu_g) d\xi \right) =$$

$$= \frac{qL}{\pi E_g} \left( - \int_{-1}^{\alpha} \ln \frac{\alpha - \xi}{2\delta} d\xi - \int_{\alpha}^1 \ln \frac{\xi - \alpha}{2\delta} d\xi - (1 + \nu_g) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \eta = \alpha - \xi; \quad \xi = -1 \Rightarrow \eta = 1 + \alpha \\ d\eta = -d\xi; \quad \xi = \alpha \Rightarrow \eta = 0 \\ \xi = 1 \Rightarrow \eta = \alpha - 1 \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( \int_{1+\alpha}^0 \ln \frac{\eta}{2\delta} d\eta + \int_0^{\alpha-1} \ln \frac{(-\eta)}{2\delta} d\eta - (1 + \nu_g) \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( \left[ \eta \ln \frac{\eta}{2\delta} - \eta \right]_{1+\alpha}^0 + \left[ \eta \ln \frac{(-\eta)}{2\delta} - \eta \right]_0^{\alpha-1} - (1 + \nu_g) \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( -(1 + \alpha) \ln \frac{1 + \alpha}{2\delta} + (1 + \alpha) + (\alpha - 1) \ln \frac{(1 - \alpha)}{2\delta} - (\alpha - 1) - (1 + \nu_g) \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( -(1 + \alpha) \ln \frac{1 + \alpha}{2\delta} - (1 - \alpha) \ln \frac{(1 - \alpha)}{2\delta} + (1 - \nu_g) \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( -(1 + \alpha) \ln(1 + \alpha) + (1 + \alpha) \ln 2\delta - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) + (1 - \alpha) \ln 2\delta + (1 - \nu_g) \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( -(1 + \alpha) \ln(1 + \alpha) + 2 \ln 2\delta - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) + (1 - \nu_g) \right) = \\
&\left\{ \delta = \frac{d}{L} \right\} \Rightarrow \\
u_\varphi &= \frac{qL}{\pi E_g} \left( -(1 + \alpha) \ln(1 + \alpha) + 2 \ln \frac{2d}{L} - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) + (1 - \nu_g) \right) \quad (\text{A.48})
\end{aligned}$$

Om den studerade punkten är mitt under plattan, dvs.  $\alpha = 0$ , fås

$$u_\varphi(\alpha = 0) = \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{2d}{L} + (1 - \nu_g) \right)$$

Om den studerade punkten är i den vänstra änden av plattan, dvs.  $\alpha = -1$ , fås

$$\begin{aligned}
u_\varphi(\alpha = -1) &= \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{2d}{L} - 2 \ln 2 + (1 - \nu_g) \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{d}{L} + (1 - \nu_g) \right) \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

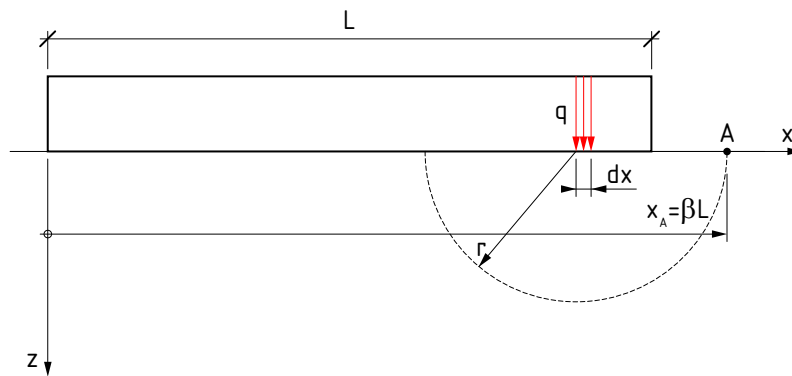
Slutligen om  $\alpha = 1$  fås



Bilaga A

$$\begin{aligned}
 u_{\phi}(\alpha = 1) &= \frac{qL}{\pi E_g} \left( -2 \ln 2 + 2 \ln \frac{2d}{L} + (1 - \nu_g) \right) = \\
 &= \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{d}{L} + (1 - \nu_g) \right) \tag{A.50}
 \end{aligned}$$

Studera nu plattan i Figur A.4 och effekten av last  $qdx$  från plattan i en punkt A belägen utanför plattans anliggningsyta.



**Figur A.4** Platta på mark – effekt i punkt utanför lastområde.

Den vertikala deformationen  $u_{\phi}$  i punkten A fås till

$$\begin{aligned}
 u_{\phi} &= \frac{q}{\pi E_g} \int_0^L \left( -2 \ln \frac{r}{d} - (1 + \nu_g) \right) dx = \\
 &= \left\{ r = \beta L - x; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad dx = L - d\xi; \quad \delta = \frac{d}{L} \right\} = \\
 &= \frac{qL}{\pi E_g} \int_0^1 \left( -2 \ln \frac{\beta - \xi}{\delta} - (1 + \nu_g) \right) d\xi = \\
 &= \left\{ \eta = \beta - \xi; \quad d\eta = -d\xi; \quad \xi = 0: \eta = \beta \right. \\
 &\quad \left. \xi = 1: \eta = \beta - 1 \right\} = \\
 &= \frac{qL}{\pi E_g} \left( \int_{\beta}^{\beta-1} 2 \ln \frac{\eta}{\delta} d\eta - \int_0^1 (1 + \nu_g) d\xi \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( \left[ 2\eta \ln \frac{\eta}{\delta} - 2\eta \right]_{\beta}^{\beta-1} - (1 + \nu_g) [\xi]_0^1 \right) = \\
&= \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2(\beta-1) \ln \frac{(\beta-1)}{\delta} - 2(\beta-1) - 2\beta \ln \frac{\beta}{\delta} + 2\beta - (1 + \nu_g) \right) = \\
&= \left\{ \delta = \frac{d}{L} \right\} \Rightarrow \\
u_{\varphi} &= \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2\beta \ln \frac{d}{\beta L} - 2(\beta-1) \ln \frac{d}{(\beta-1)L} + (1 - \nu_g) \right) \quad (\text{A.51})
\end{aligned}$$

Om den studerade punkten är belägen precis vid lastområdets gräns,  $\beta = 1$ , fås

$$u_{\varphi} = \frac{qL}{\pi E_g} \left( 2 \ln \frac{d}{L} + (1 - \nu_g) \right)$$

vilket överensstämmer med ekv. (A.49) och (A.50).

### A.1.3 Utbredd horisontell last mot halvrymd

På samma sätt som för vertikal utbredd last mot halvrymd kan horisontell utbredd last analyseras.

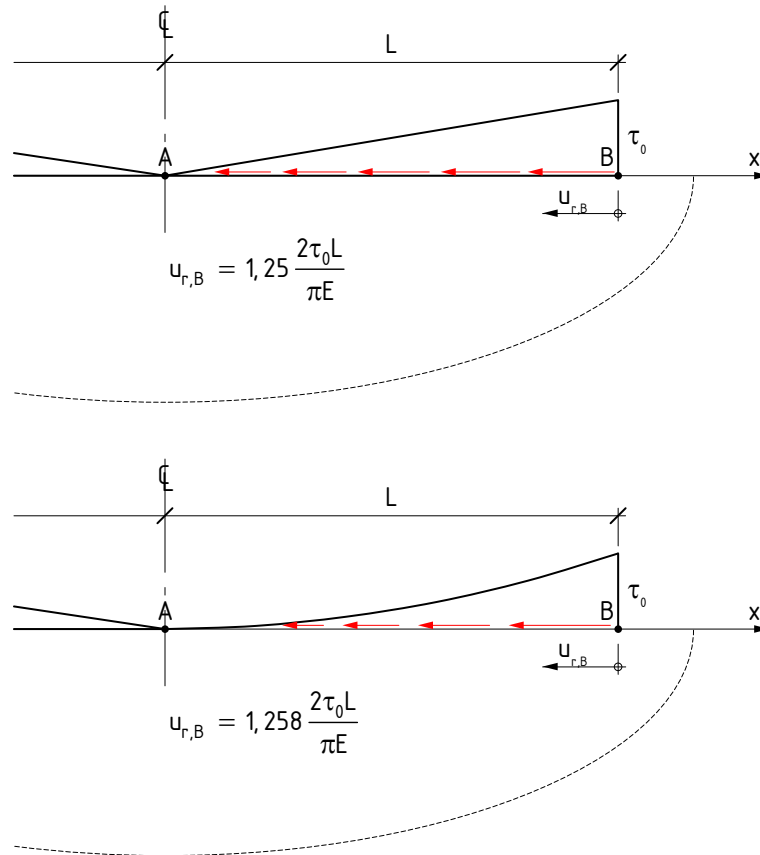
Låt ändringen av den radiella förskjutningen  $du_r$  definieras positivt mot origo (dvs. ej enligt strikt polärt koordinatsystem) för en infinitesimal last  $P = qdx$ . För hela markytan,  $\varphi = \pm\pi/2$ , gäller då att

$$\begin{aligned}
du_r &= \frac{2q}{\pi E_g} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \ln \frac{d}{r} - \frac{(1 - \nu_g)}{2} \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right) dx = \\
&= \frac{2q}{\pi E_g} \left( -\sin \theta \ln \frac{d}{r} - \frac{(1 - \nu_g)}{2} \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) dx = \quad (\text{A.52})
\end{aligned}$$

$$du_r = \frac{2q}{\pi E_g} \ln \frac{d}{r} dx \quad \text{om } r > 0 \quad (\text{A.53})$$

Beroende på vilken fördelning lasten har fås olika uttryck för deformationen. Två olika lastfördelningar studeras: linjär (triangulär) och parabolisk, se Figur A.5.

Bilaga A



**Figur A.5** Horisontella förskjutning på ytan av en halvoändlig rymd vid punkt B för två olika horisontella laster.

Förskjutningarna i ändarna av en kropp beroende på horisontell last längs kroppens rand mot angränsande kropp eller material kan bestämmas genom att ansätt en lastfördelning (triangulär eller parabolisk) i ekv. (A.53) och integrera över laststräckan. Följande resultat erhålls som slutvärde på förskjutningen i B i Figur A.5, se Bernander, S (2001):

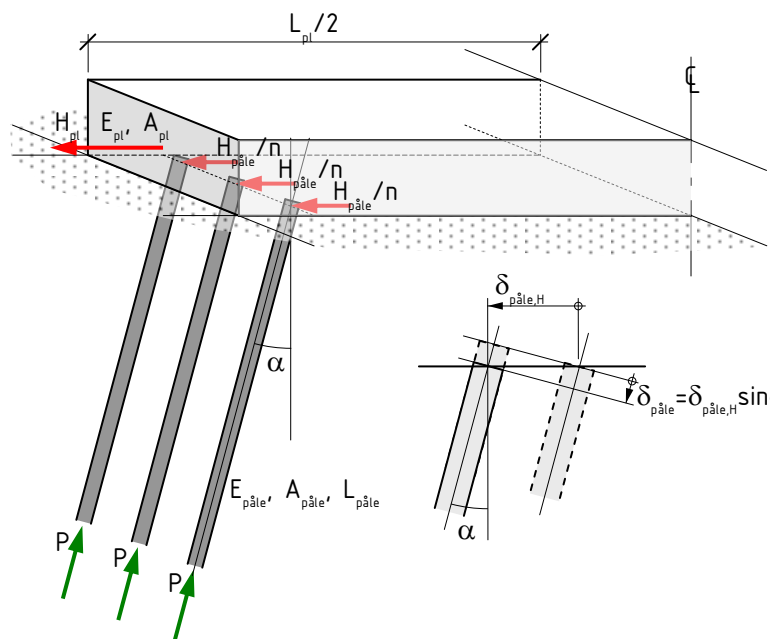
$$u_{r,B} = \frac{5}{4} \frac{2\tau_0 L}{\pi E} \quad \text{triangulär fördelning} \quad (\text{A.54})$$

$$u_{r,B} = \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \ln 2 \right) \frac{2\tau_0 L}{\pi E} \approx 1,258 \frac{2\tau_0 L}{\pi E} \quad \text{parabolisk fördelning} \quad (\text{A.55})$$



## Bilaga B Platta på lutande pålar

Studera en grundplatta (påplint) med en rad med  $n$  stycken lutande pålar med samma elasticitetsmodul  $E_p$ , samma tvärsnittsarea  $A_p$ , samma längd  $L_p$  och samma lutning  $\alpha$  grader från vertikallinjen, se Figur B.1. Plattan längdändras pga. hydratation, fuktändring eller temperaturlast. Längdändringen kan ses som en horisontell last  $H_{pl}$  vilken tas upp av de lutande pålarna.



**Figur B.1** Platta på lutande pålar.

Tvånget  $\gamma_R$  i plattan från de lutande pålarna kan utgående från Betonghandbok (1994) modelleras som

Tvång

$$\gamma_{RT} = \frac{1}{1 + \frac{E_{pl} A_{pl}}{L_{pl}} \frac{1}{S_{pH}}} \quad (\text{B.1})$$

där  $E_{pl}$ ,  $A_{pl}$  och  $L_{pl}$  är plattans elasticitetsmodul, tvärsnittsarea respektive längd.  $S_{pH}$  är pålarnas sammanlagda styvhet [N/m].

Vid belastning med en kraft  $P$  i en axialbelastad, elastisk stång, här en påle, fås förlängningen av pålen  $\delta_p$  som

$$\delta_p = P \cdot \frac{1}{S_p}$$

som ger styvheten  $S_p$  för en påle till

$$S_p = \frac{P}{\delta_p} \quad (\text{B.2})$$

För aktuellt fall fås i horisontalled (plattans längdriktning) den horisontella styvheten

$$S_{p\ddot{a}le,H} = \frac{H_{pl}}{\delta_{p\ddot{a}le,H}} \quad (\text{B.3})$$

Generellt är längdändringen av en påle

$$\delta_{p\ddot{a}le} = P \frac{L_{p\ddot{a}le}}{E_{p\ddot{a}le} A_{p\ddot{a}le}}$$

Den horisontella längdändringen blir då

$$\delta_{p\ddot{a}le,H} = \frac{\delta_{p\ddot{a}le}}{\sin \alpha} = P \frac{L_{p\ddot{a}le}}{E_{p\ddot{a}le} A_{p\ddot{a}le}} \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{B.4})$$

Horisontell kraftjämvikt ger

$$H_{pl} - nP \sin \alpha = 0$$

$$P = \frac{H_{pl}}{n} \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{B.5})$$

som insatt i ekv. (B.4) ger

Bilaga B

$$\delta_{p\ddot{a}leH} = \frac{H_{pl}}{n} \frac{L_{p\ddot{a}le}}{E_{p\ddot{a}le} A_{p\ddot{a}le}} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\text{B.6})$$

Detta ger nu styvheten till, ekv. (B.3)

$$S_{p\ddot{a}leH} = \frac{H_{pl}}{\delta_{p\ddot{a}leH}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \frac{L_{p\ddot{a}le}}{E_{p\ddot{a}le} A_{p\ddot{a}le}} \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad (\text{B.7})$$

som slutligen ger sambandet för tvånget

$$\gamma_{RT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \frac{E_{pl} A_{pl}}{E_{p\ddot{a}le} A_{p\ddot{a}le}} \frac{L_{p\ddot{a}le}}{L_{pl}} \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad (\text{B.8})$$

Exempel: Bestäm tvånget i en plint med  $A_{pl} = 2 \times 6 \text{ m}^2$  och  $L_{pl} = 10 \text{ m}$  och som är grundlagd på 30 st sneda betongpålar med tvärmåttan  $235 \times 235 \text{ mm}^2$ , längden  $L_{p\ddot{a}le} = 13 \text{ m}$  och lutningen 4:1. Pålarnas och plattans elasticitetsmodul är  $E_{p\ddot{a}le} = 37000 \text{ MPa}$  respektive  $E_{pl} = 33000 \text{ MPa}$ .

Pållutningen 4:1 motsvarar vinkeln, från lodlinjen:

$$\alpha = \arctan \frac{1}{4} = 14^\circ$$

Ekv. (B.8) ger translationsrandtvånget

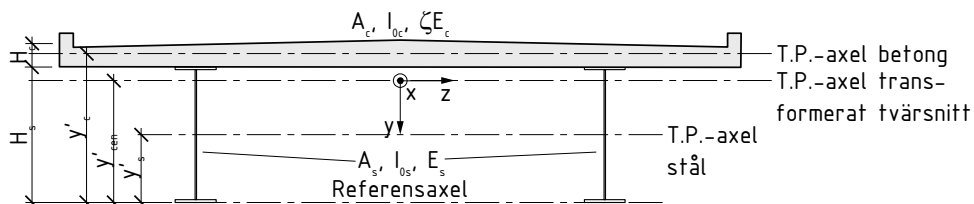
$$\gamma_{RT} = \frac{1}{1 + \frac{1}{30} \frac{33000 \cdot 2 \cdot 6}{37000 \cdot 0,25 \cdot 0,25} \frac{13}{10} \frac{1}{\sin^2 14^\circ}} = \frac{1}{1 + \frac{33000 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 13}{30 \cdot 37000 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot \sin^2 14^\circ}} = 0,007 -$$

vilket är försumbart.





## Bilaga C Samverkansbroar



För en samverkansbro är randtvången lika med noll, dvs.  $\gamma_{RT}, \gamma_{RR,y}$  och  $\gamma_{RR,z} = 0$ . Vidare är betongtvärsnittet så lågt att någon resiliens inte är aktuell,  $\delta_{res} = 1$ .

Det antas att tvärsnittet är symmetriskt och att någon glidning inte sker mellan betongen och stål balkarna,  $\delta_{glid} = 1$ .

Translationstvångskoefficienten för plana tvärsnitt fås som, se Nilsson, M (2003a)

$$\begin{aligned} \gamma_R^t(x) &= \frac{\int_{A_c} dA_c}{\int_{A_c} dA_c + \frac{E_s}{\zeta E_c} \int_{A_s} dA_s} = \\ &= \frac{A_c}{A_c + \frac{E_s}{\zeta E_c} A_s} \Rightarrow \\ \gamma_R^t(x) &= \frac{1}{1 + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s}{A_c}} \end{aligned} \quad (0.0)$$

Rotationstvångskoefficienten för plana tvärsnitt fås som

$$\begin{aligned}\gamma_R'(x) &= \frac{y_c \int_{A_c} dA_c}{\int_{A_c} y_c^2 dA_c + \frac{E_s}{\zeta E_c} \int_{A_s} y_s^2 dA_s} y = \\ &= \frac{A_c (y'_{\text{cen}} - y'_c)}{I_{\text{ms}}} y\end{aligned}$$

där  $y'_{\text{cen}}$  är

$$\begin{aligned}&= \frac{A_c (y'_{\text{cen}} - y'_c)}{I_{0c} + A_c (y'_{\text{cen}} - y'_c)^2 + \frac{E_s}{\zeta E_c} (I_{0s} + A_s (y'_{\text{cen}} - y'_s)^2)} y = \\ &= \frac{\frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s (y'_s - y'_c)}{1 + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s}{A_c}} y}{I_{0c} + \frac{E_s}{\zeta E_c} I_{0s} + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s (y'_s - y'_c)^2}{\left(1 + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s}{A_c}\right)}}\end{aligned}\quad (0.1)$$

Slutligt uttryck för tvånget blir

$$\gamma_R = 1 - \frac{1}{1 + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s}{A_c}} - \frac{\frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s (y'_s - y'_c)}{1 + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s}{A_c}} y}{I_{0c} + \frac{E_s}{\zeta E_c} I_{0s} + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s (y'_s - y'_c)^2}{\left(1 + \frac{E_s}{\zeta E_c} \frac{A_s}{A_c}\right)}}\quad (0.2)$$